

# Część **E**

## **PRZYKŁADOWE ZADANIA**

## Spis treści części E

E62. Lista przykładowych zadań .....	3
62.1. Testy dokładności .....	6
62.2. Dynamika_Belki .....	10
62.3. Dynamika_Wspornika .....	12
62.4. Dźwigar drewniany .....	14
62.5. Linia poślizgu .....	15
62.6. Elementy pękające .....	16
62.7. Podpora ukośna .....	17
62.8. Podpory jednostronne i ograniczone .....	18
62.9. Podpora z luzem .....	19
62.10. Podpory z tarcielem .....	20
62.11. Różne obciążenia .....	21
62.12. Symetria w tarczy .....	23
62.13. Podłoże Winklera .....	24
62.14. Nieliniowe podłoże Winklera .....	25
62.15. Zmienne podpory .....	26
62.16. Zbrojenie tarczy żelbetowej .....	27
E63. Przykładowe zadania OS .....	28
63.1. Zadanie Krążek .....	28
63.1.1. Obciążenie siłą skupioną .....	28
63.1.2. Obciążenie ciężarem własnym .....	30
63.1.3. Obciążenie ciśnieniem .....	32
63.1.4. Obciążenie termiczne .....	33
63.1.5. Obciążenie skurczem .....	33
63.1.6. Przemieszczenie wstępne w podporze .....	34
63.1.7. Obciążenie siłami odśrodkowymi .....	34
63.2. Zadanie Rura .....	36
63.2.1. Obciążenie ciśnieniem .....	36
63.2.2. Obciążenie temperaturą .....	38
63.2.3. Obciążenie siłami odśrodkowymi .....	39
63.3. Zadanie Zbiornik .....	41

## E 62. Lista przykładowych zadań

W folderze \Przykłady\_Tarcz zamieszczono 66 przykładowych zadań. Część z nich jest tylko przykładami geometrii, ale są też zadania kompletne. Te będą szerzej omówione.  
Lista przykładowych zadań w kolejności alfabetycznej.

1. A\_Model - jest to podstawowe zadanie od którego każdy początkujący użytkownik powinien zacząć. Będzie ono omawiane dalej.
2. Czworokaty1 – test dokładności – model zbudowany z elementów czworokątnych. Zadanie opisane dalej razem z zadaniami Czworokaty2, Trojkaty1, Trojkaty2, Trojkaty3, i Trojkaty4.
3. Czworokaty2 – test dokładności – model zbudowany z elementów czworokątnych.
4. DodajLinieT – jest to siatka zmodyfikowana opcja DodajLinie.. Ta siatka jest opisywana w rozdziale 32.9.
5. DodajLukT – jest to siatka zmodyfikowana opcja DodajLinie.. Ta siatka jest opisywana w rozdziale 32.10.
6. DodajLuk90T – jest to siatka, w której wprowadzono łukowy obszar regularny. Jest to ilustracja do rozdziału 32.4.
7. DodajWycinek\_1T – jest to siatka, w której wprowadzono obszar wycinka koła podzielony mniej więcej równymi elementami. Zadanie dotyczy rozdziału 32.5.
8. DodajWycinek\_2T – jest to siatka, w której wprowadzono obszar wycinka koła podzielony wachlarzowo. Zadanie dotyczy rozdziału 32.5.
9. DynamikaBelki – jest to zadanie ilustrujące obliczenia dynamiczne. Będzie ono omówione dalej.
10. DynWspornika – jest to zadanie ilustrujące obliczenia dynamiczne. Będzie ono omówione dalej.
11. Elipsa\_90T - jest to przykład automatycznej generacji siatki w kształcie  $\frac{1}{4}$  elipsy. Jest to ilustracja do rozdziału 30.6.
12. Elipsa\_180T – jest to przykład automatycznej generacji siatki w kształcie półelipsy. Jest to ilustracja do rozdziału 30.6.
13. Elipsa\_360T - jest to przykład automatycznej generacji siatki w kształcie elipsy. Jest to ilustracja do rozdziału 30.6.
14. Kolowy\_A - jest to przykład automatycznej generacji siatki w kształcie koła. Jest to ilustracja do rozdziału 30.5.
15. Kolowy\_B - jest to przykład automatycznej generacji siatki w kształcie koła. Jest to ilustracja do rozdziału 30.5.
16. Kolowy\_C - jest to przykład automatycznej generacji siatki w kształcie koła. Jest to ilustracja do rozdziału 30.5.
17. Kolowy\_D - jest to przykład automatycznej generacji siatki w wycinka koła. Jest to ilustracja do rozdziału 30.5.
18. Linia\_Poslizgu – zadanie z linią poślizgu.
19. Luk60\_R - jest to przykład automatycznej generacji siatki w kształcie łuku o kącie środkowym równym  $60^\circ$ . Środki łuku wewnętrznego i zewnętrznego są w tym samym miejscu. Jest to ilustracja do rozdziału 30.4.
20. Luk180\_R - jest to przykład automatycznej generacji siatki w kształcie łuku o kącie środkowym równym  $180^\circ$ . Środki łuku wewnętrznego i zewnętrznego są w tym samym miejscu. Jest to ilustracja do rozdziału 30.4.
21. Luk360\_R - jest to przykład automatycznej generacji siatki w kształcie pierścienia o stałej szerokości. Jest to ilustracja do rozdziału 30.4.
22. Model\_Z\_Gruntem - przykład w którym zadano materiał typu Grunt.
23. Pekajace - przykład w którym zastosowano elementy pękające.
24. Pierscien\_Eliptyczny - zadanie ilustrujące możliwość przekształcenia pierścienia kołowego w eliptyczny. Do rozdziału 33.10.

25. `Pierscien_Kolowy` - wyjściowe zadanie do przekształcenia w obszar eliptyczny. Do rozdziału 33.10.
26. `Podpora-Ukosna` – jest to zadanie ilustrujące skutki wprowadzenia podpory ukośnej do tarczy.
27. `Podparcie_Z_Pliku` - zadanie w którym wprowadzono podpory z pliku. Do rozdziału 38.3.
28. `Podp_Liniowe` – jest to liniowe rozwiązanie zadania, w którym wprowadzono nieliniowe podpory.
29. `Podp_Nieliniowe` – rozwiązanie nieliniowe, w którym zadano podporę jednostronną.
30. `Podp_Ograniczone` – rozwiązanie nieliniowe, w którym wprowadzono podporę o ograniczonej nośności.
31. `Podp_Zluzem` – rozwiązanie nieliniowe podpory z luzem.
32. `Podp_Z_Tarciem_Lin` – zadanie z podporą z tarciem – rozwiązanie liniowe.
33. `Podp_Z_Tarciem` – zadanie z podporą z tarciem – rozwiązanie nieliniowe.
34. `Powiel` – wyjściowa siatka do ilustracji różnych możliwości powielania. Jest o niej mowa w rozdziale 32.12.
35. `Powiel_Katowo` – jest to siatka powstała przez powielenie obrotowe. Jest o niej mowa w rozdziale 32.12.
36. `Powiel_Liniowo` – jest to siatka powstała przez powielenie liniowe. Jest o niej mowa w rozdziale 32.12.
37. `Powiel_Lustro` – jest to siatka powstała przez lustrzane odbicie. Jest o niej mowa w rozdziale 32.12.
38. `RamaCeglana` – model dwumateriałowy z elementami pękającymi – rozwiązanie liniowe.
39. `RamaCeglanaN` - model dwumateriałowy z elementami pękającymi – rozwiązanie nieliniowe.
40. `Rozne-Obc` – model ilustrujący różne obciążenia tarczy.
41. `RuchDowolne` - przykład obciążenia ruchomego zdefiniowanego przez użytkownika.
42. `RuchDrogowe` - przykład obciążenia ruchomego drogowego.
43. `RuchKolejowe` - przykład obciążenia ruchomego kolejowego.
44. `Sily_Z_Pliku` - przykład obciążenie ruchomego czytane z pliku.
45. `ScianaOtwory` – model obiektu rzeczywistego w którym występują przecięcia i ograniczenia zbrojenia.
46. `ScianaSzczyt` – model obiektu rzeczywistego.
47. `Sily_Z_Pliku` - model w którym obciążenie wczytano z pliku.
48. `SymetriaT` – model z płaszczyzną symetrii.
49. `Trapez_NT` – przykład automatycznie wygenerowanej siatki trapezowej o nieregularnym podziale. Zadanie jest ilustracją do rozdziału 30.2.
50. `Trapez_RT` – przykład automatycznie wygenerowanej siatki trapezowej o regularnym podziale. Zadanie jest ilustracją do rozdziału 30.2.
51. `Trojkat_AT` – przykład automatycznie wygenerowanej siatki trójkątnej równobocznej o regularnym podziale. Zadanie jest ilustracją do rozdziału 30.3.
52. `Trojkat_BT` – przykład automatycznie wygenerowanej siatki trójkątnej równoramiennej o nieregularnym podziale. Zadanie jest ilustracją do rozdziału 30.3.
53. `Trojkat_CT` – przykład automatycznie wygenerowanej siatki trójkątnej prostokątnej o nieregularnym podziale. Zadanie jest ilustracją do rozdziału 30.3.
54. `Trojkat_DT` – przykład automatycznie wygenerowanej siatki trójkątnej dowolnej o nieregularnym podziale. Zadanie jest ilustracją do rozdziału 30.3.
55. `Trojkaty1` – test dokładności – model zbudowany z elementów trójkątnych.
56. `Trojkaty2` – test dokładności – model zbudowany z elementów trójkątnych.
57. `Trojkaty3` – test dokładności – model zbudowany z elementów trójkątnych.
58. `Trojkaty4` – test dokładności – model zbudowany z elementów trójkątnych.
59. `Wezly_Zalezne_T1` – przykład zastosowania w modelowaniu węzłów zależnych. Jest to ilustracja do rozdziału 40.4.
60. `Wezly_Zalezne_T2` – przykład zastosowania w modelowaniu węzłów zależnych. Jest to ilustracja do rozdziału 40.4.

## **Zadania**

---

61. Winkler – tarcza na podłożu sprężystym ze składnikiem stycznym – rozwiązanie liniowe.
62. Winkler\_Lin - Liniowe rozwiązanie do następnego zadania.
63. Winkler\_Nielin – tarcza na podłożu sprężystym, jednostronnym i o ograniczonej nośności.
64. Zelbet – tarcza z wymiarowaniem żelbetu.
65. Zmienna\_GruboscT – jest to ilustracja możliwości zadawania zmiennych grubości. Zadanie jest omówione w rozdziale 34.
66. Zmienne\_PodporyT – jest to ilustracja możliwości modelowania układów o zmiennej strukturze w każdym schemacie obciążenia.

W folderze \Przykłady\_OS zamieszczono sześć przykładowych zadań. Trzy z nich opisano dokładniej.

1. Krazek - model pełnego krążka poddanego różnym obciążeniami.
2. Linia\_Poslizgu - model linii poślizgu w zadaniu osiowo-symetrycznym. Pełny stożek jest wciskany w pierścień.
3. Linia\_PoslizguR - model linii poślizgu w zadaniu osiowo-symetrycznym. Stożkowy pierścień jest wciskany w drugi pierścień.
4. Pierscien - model pierścienia o przekroju identycznym jak w zadaniu Krazek,.
5. Rura - model rury grubościennej poddanej różnym obciążeniom.
6. Zbiornik - walcowy zbiornik obciążony hydrostatycznie.

## 62.1. Testy dokładności

W programie ABC Tarcza są stosowane elementy trójkątne i czworokątne. W zadaniach Czworokaty1, Czworokaty2, Trojkaty1, Trojkaty2, Trojkaty3, Trojkaty4 pokazano wpływ gęstości podziału na dokładność rozwiązania. Odpowiednio do nazwy stosowano podział na elementy czworokątne i trójkątne. We wszystkich zadaniach zamodelowano wspornik o długość  $L=1\text{m}$  i o przekroju  $b \times h = 0,01\text{m} \times 0,1\text{m}$ . Model przedstawiał tarczę o wymiarach  $1\text{m} \times 0,1\text{m}$  o grubości  $0,01\text{m}$ . W węzłach z lewej strony przyjmowano podparcie modelujące utwierdzenie. W modelu wprowadzono materiał C20/25 o module Younga  $E = 29961\text{MPa}$ , o ciężarze właściwym  $\gamma = 25\text{ kN/m}^3$ . Przyjęto cztery podstawowe schematy obciążenia:

- ciężar własny belki,
- obciążenie liniowe o natężeniu  $q = 0,1\text{ kN/m}$ ,
- siła skupiona zginająca na końcu belki o wartości  $P_y = 0,1\text{kN}$ ,
- siła skupiona rozciągająca o wartości  $P_x = 10\text{kN}$ .

W rozwiązaniu teoretycznym oparto się na wsporniku belkowym, dla którego wyznaczono ugięcia i naprężenia. Moment bezwładności prostokątnego przekroju o wymiarach  $0,01\text{m} \times 0,1\text{m}$  jest równy:  $J = 8,33 \cdot 10^{-7}\text{m}^4$ , a jego pole jest równe:  $A = 0,001\text{m}^2$ . Obciążenie ciężarem własnym można przedstawić jako obciążenie rozłożone liniowo o natężeniu:

$$q_{cw} = b \cdot h \cdot \gamma = 0,025\text{kN/m}.$$

Ugięcie swobodnego końca wspornika pod obciążeniem liniowym jest równe:

$$f = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot J}$$

dla obciążenia ciężarem własnym ugięcie to wynosi:  $f = 0,1252\text{mm}$ ,

dla obciążenia liniowego  $q=0,1\text{kN/m}$  ugięcie to wynosi:  $f = 0,5008\text{mm}$ .

Ugięcie swobodnego końca wspornika pod obciążeniem siłą skupioną  $P_y$  jest równe:

$$f = \frac{P_y \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

dla obciążenia siłą o wartości  $P_y = 0,1\text{kN}$  ugięcie to wynosi:  $f = 1,336\text{mm}$ .

Wydłużenie belki rozciąganej siłą osiową  $P_x$  jest równe:

$$u = \frac{P_x}{E \cdot A}$$

dla obciążenia siłą o wartości  $P_x = 10\text{kN}$  wydłużenie to jest równe:  $u = 0,3338\text{mm}$ .

W tabeli zestawiono wartości otrzymane z rozwiązań numerycznych.

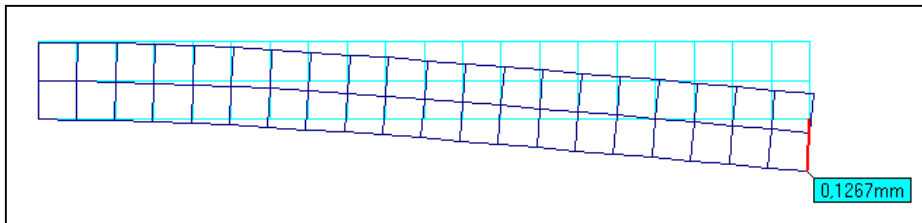
Tabela 1

Zadanie	CW f[mm]	Błąd [%]	$q=0,1\text{kN/m}$ f[mm]	Błąd [%]	$P_y=0,1\text{kN}$ f[mm]	Błąd [%]	$P_x=10\text{kN}$ u[mm]	Błąd [%]
Czworokaty1	0,1262	0,8	0,5049	0,8	1,34	0,3	0,3338	0
Czworokaty2	0,12647	1,0	0,5053	0,9	1,343	0,5	0,3338	0
Trojkaty1	0,03136	>100	0,1255	>100	0,3257	>100	0,3338	0
Trojkaty2	0,06927	55	0,277	55	0,7352	55	0,3338	0
Trojkaty3	0,1047	20	0,4177	20	1,111	20	0,3355	0,5
Trojkaty4	0,1138	10	0,4549	10	1,21	10	0,3354	0,5

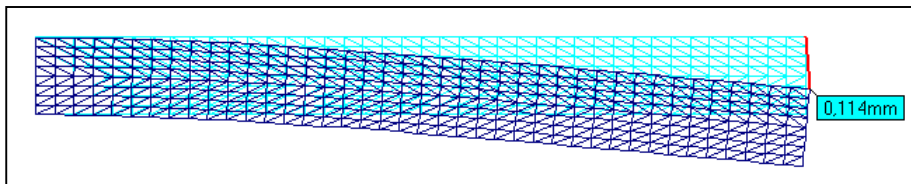
## Zadania

Analizując wartości przemieszczeń z tabeli 1 można zauważyć ogromną dysproporcję dokładności rozwiązania przy podziale na elementy czworokątne i trójkątne, ale tylko przy zginaniu. Przy rozciąganiu dokładność rozwiązań numerycznych jest taka sama. Ten ostatni efekt wynika ze stałości odkształcenia przy osiowym rozciąganiu. Elementy czworokątne są dokładne przy każdym podziale, natomiast przy elementach trójkątnych musi być bardzo gęsty podział, aby otrzymać wyniki o tolerowanym błędzie np.: 10%.

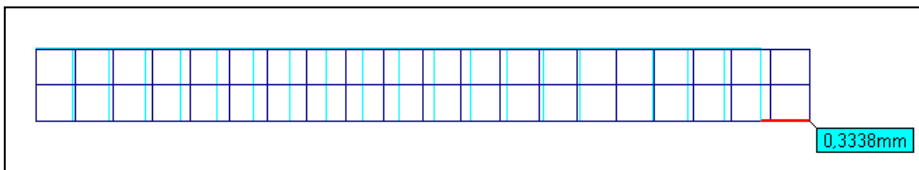
*Uwaga: na rysunkach są wypadkowe przemieszczeń, w tabeli nr 1 są składowe Y lub X.*



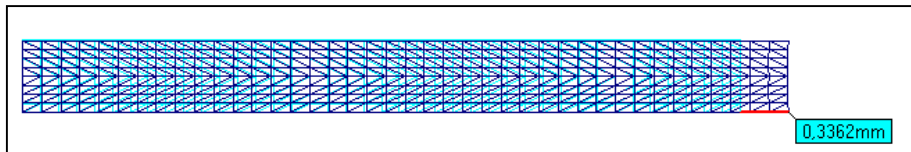
Ugięcia wywołane ciężarem własnym – elementy czworokątne



Ugięcia wywołane ciężarem własnym – elementy trójkątne



Odkształcenia wywołane rozciąganiem – elementy czworokątne



Odkształcenia wywołane rozciąganiem – elementy trójkątne

Naprężenia we wsporniku zginanym są określone wzorem:

$$\sigma_g = \frac{Mg \cdot y}{J}$$

gdzie:

$Mg$  – moment zginający w przekroju odpowiadającym środkowi ciężkości elementu,  
 $y$  – odległość od osi obojętnej środka ciężkości elementu skończonego,

Naprężenia wywołane rozciąganiem są równe:

$$\sigma_r = \frac{P_x}{A}$$

Dla zadania Czworokaty1 odległość środka ciężkości elementu nr 1 od swobodnego końca jest równa:  $L^* = 0,95m$ , odległość środka ciężkości od osi obojętnej jest równa:  $0m$ .

Naprężenia  $\sigma_g$  wywołane zginaniem są w tym miejscu zerowe.

Naprężenia wywołane rozciąganiem są równe:

$$\sigma_r = 10MPa.$$

Dla zadania Czworokaty2 odległość środka ciężkości elementu nr 1 od swobodnego końca jest równa:  $L^* = 0,975m$ , odległość środka ciężkości od osi obojętnej jest równa:  $0,025m$ .

Naprężenia wywołane zginaniem są w tym miejscu równe:

przy obciążeniu ciężarem własnym:  $\sigma_g = 0,3565MPa$

przy obciążeniu liniowym  $q = 0,1kN/m$ :  $\sigma_g = 1,426MPa$

przy obciążeniu siłą skupioną  $P_y = 0,1kN$ :  $\sigma_g = 2,925MPa$

Naprężenia wywołane rozciąganiem są równe:  $\sigma_r = 10MPa$ .

Dla zadania Trojkaty1 odległość środka ciężkości elementu nr 1 od swobodnego końca jest równa:  $L^* = 0,9333m$ , odległość środka ciężkości od osi obojętnej jest równa:  $0,01667m$ .

Naprężenia wywołane zginaniem są w tym miejscu równe:

przy obciążeniu ciężarem własnym:  $\sigma_g = 0,2175MPa$

przy obciążeniu liniowym  $q = 0,1kN/m$ :  $\sigma_g = 0,871MPa$

przy obciążeniu siłą skupioną  $P_y = 0,1kN$ :  $\sigma_g = 1,867MPa$

Naprężenia wywołane rozciąganiem są równe:  $\sigma_r = 10MPa$ .

Dla zadania Trojkaty2 odległość środka ciężkości elementu nr 1 od swobodnego końca jest równa:  $L^* = 0,9667m$ , odległość środka ciężkości od osi obojętnej jest równa:  $0,03333m$ .

Naprężenia wywołane zginaniem są w tym miejscu równe:

przy obciążeniu ciężarem własnym:  $\sigma_g = 0,4682MPa$

przy obciążeniu liniowym  $q = 0,1kN/m$ :  $\sigma_g = 1,869MPa$

przy obciążeniu siłą skupioną  $P_y = 0,1kN$ :  $\sigma_g = 3,867MPa$

Naprężenia wywołane rozciąganiem są równe:  $\sigma_r = 10MPa$ .

Dla zadania Trojkaty3 odległość środka ciężkości elementu nr 1 od swobodnego końca jest równa:  $L^* = 0,9833m$ , odległość środka ciężkości od osi obojętnej jest równa:  $0,04167m$ .

Naprężenia wywołane zginaniem są w tym miejscu równe:

przy obciążeniu ciężarem własnym:  $\sigma_g = 0,6042MPa$

przy obciążeniu liniowym  $q = 0,1kN/m$ :  $\sigma_g = 2,417MPa$

przy obciążeniu siłą skupioną  $P_y = 0,1kN$ :  $\sigma_g = 4,917MPa$

Naprężenia wywołane rozciąganiem są równe:  $\sigma_r = 10MPa$ .

Dla zadania Trojkaty4 odległość środka ciężkości elementu nr 1 od swobodnego końca jest równa:  $L^* = 0,9833m$ , odległość środka ciężkości od osi obojętnej jest równa:  $0,04583m$ .



## Zadania

Naprężenia wywołane zginaniem są w tym miejscu równe:

przy obciążeniu ciężarem własnym:  $\sigma_g = 0,6646 \text{ MPa}$

przy obciążeniu liniowym  $q = 0,1 \text{ kN/m}$ :  $\sigma_g = 2,659 \text{ MPa}$

przy obciążeniu siłą skupioną  $P_y = 0,1 \text{ kN}$ :  $\sigma_g = 5,408 \text{ MPa}$

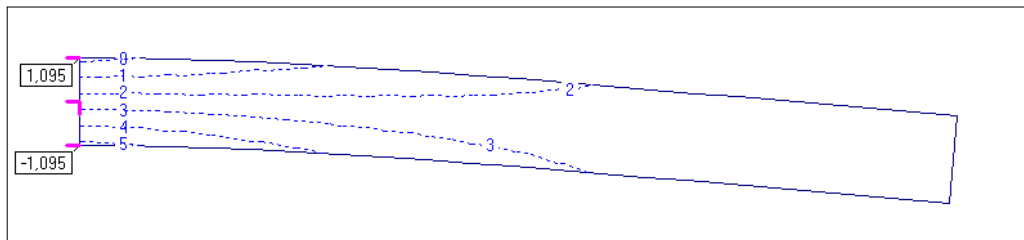
Naprężenia wywołane rozciąganiem są równe:  $\sigma_r = 10 \text{ MPa}$ .

Naprężenia porównano z wartościami obliczonymi numerycznie i zestawiono w tabeli 2.

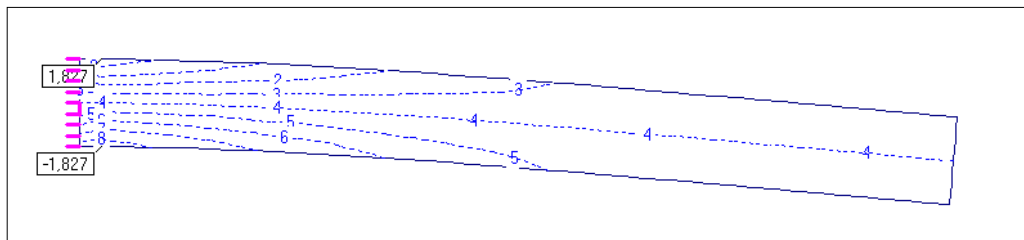
Tabela 2

Zadanie	CW $\sigma [\text{MPa}]$	Błąd [%]	$q=0,1 \text{ kN/m}$ $\sigma [\text{MPa}]$	Błąd [%]	$P_y=0,1 \text{ kN}$ $\sigma [\text{MPa}]$	Błąd [%]	$P_x=10 \text{ kN}$ $\sigma [\text{MPa}]$	Błąd [%]
Czworokaty1	0	-	0	-	0	-	10	0
Czworokaty2	0,356	0,2	1,424	0,2	2,922	0,1	10	0
Trojkaty1	0,1752	20	0,7227	20	1,503	24	10	0
Trojkaty2	0,4085	13	1,665	12	3,426	13	10	0
Trojkaty3	0,6241	4	2,522	4	5,093	3,5	10	0
Trojkaty4	0,6754	2,7	2,729	2,6	5,485	1,4	10	0

Analizując wyniki z tabeli nr 2 można stwierdzić, że elementy czworokątne zapewniają bardzo dobrą dokładność naprężeń. W elementach trójkątnych dokładność ta zależy do gęstości podziału, ale rośnie znacznie szybciej niż przy przemieszczeniach. Te cechy elementów trójkątnych zdecydowały, że powinny one być stosowane sporadycznie.



Izolinie naprężeń  $\sigma_x$  przy elementach czworokątnych



Izolinie naprężeń  $\sigma_x$  przy elementach czworokątnych

## 62.2. Zadanie DynamikaBelki

Jest to proste zadanie, w którym obliczono częstotliwości drgań własnych belki wolno podpartej zamodelowanej jako tarcza. Belka ma długość  $L = 20\text{m}$ , wysokość  $t = 2\text{m}$  i grubość  $b = 0,25\text{m}$ . Jest wykonana z betonu C20/25, dla którego moduł sprężystości jest równy  $E = 29961\text{MPa}$ , ciężar właściwy betonu jest równy  $\gamma = 25\text{kN/m}^3$ . Traktując ten model jak belkę wolnopodpartą można obliczyć dla niej kolejne częstotliwości własne drgań poprzecznych (giętych) z wzoru:

$$\omega_n = n^2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{gEJ}{\gamma A}}$$

gdzie:

$$J = \frac{bt^3}{12} = 0,1667\text{m}^4,$$

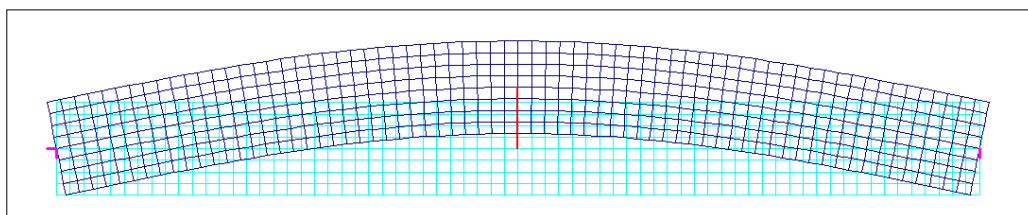
$$A = bt = 0,5\text{m}^2,$$

$$g = 9,81\text{ m/s}^2.$$

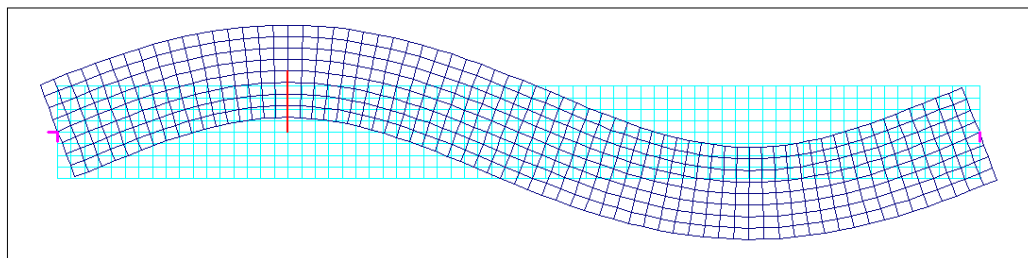
Po wstawieniu wartości obliczono cztery pierwsze częstotliwości:

$$\omega_1 = 48,85[1/\text{s}], \omega_2 = 195,4[1/\text{s}], \omega_3 = 439,6[1/\text{s}], \omega_4 = 781,6[1/\text{s}].$$

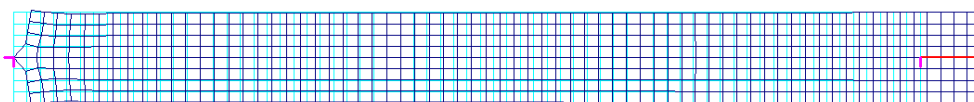
Wybierając w module WYNIKI przycisk Częstotliwości otrzyma się listę częstotliwości. Analizując ją można stwierdzić, że tylko cztery częstotliwości z sześciu obliczonych są zbliżone do wartości teoretycznych. Przeglądając postacie drgań można stwierdzić, że dwie częstotliwości odpowiadają drganiom podłużnym, a nie giętnym. Druga sprawa to różnice pomiędzy wartościami teoretycznymi i numerycznymi. Tylko pierwsza częstotliwość różni się od wartości teoretycznej o mniej niż 2%. Pozostałe częstotliwości wyznaczone numerycznie różnią się od wartości teoretycznych następująco: druga o 6%, trzecia o 14% i czwarta o 23%. Te różnice wynikają z różnicy założeń. W modelu teoretycznym przyjęto belkę sprowadzoną do osi. Przy wyznaczaniu częstotliwości pominięto ruch obrotowy przekroju. Model numeryczny na proporcje 1:10 tak, więc tylko dla pierwszej częstotliwości może być traktowany jako belka. Na pozostałe częstotliwości zaczynają coraz mocniej wpływać ruchy obrotowe przekroju.



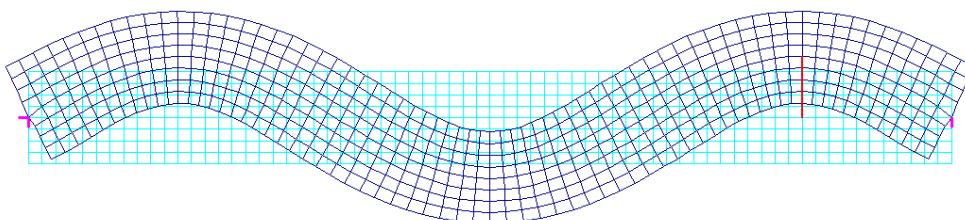
Pierwsza postać drgań własnych



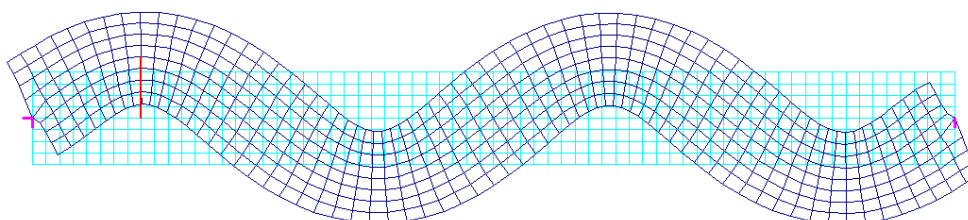
Druga postać drgań własnych



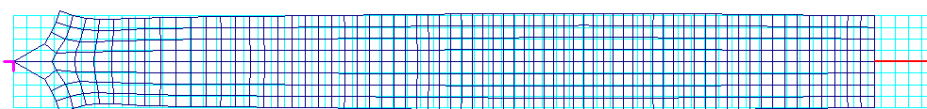
Trzecia postać drgań własnych (drgania podłużne)



Czwarta postać drgań własnych



Piąta postać drgań własnych



Szósta postać drgań własnych (drgania podłużne)

## 62.3. Dynamika wspornika

W zadaniu DynWspornika obliczono częstotliwości i postacie drgań tarczy modelującej wspornik. Tarcza ma długość  $L = 20\text{m}$ , wysokość  $b = 2\text{m}$  i grubość  $t = 0,25\text{m}$ . Jest wykonana z betonu C20/25, dla którego moduł sprężystości jest równy  $E = 29961\text{ MPa}$ , ciężar właściwy betonu jest równy  $\gamma = 25\text{ kN/m}^3$ . Traktując tę tarczę jako belkę wspornikową można obliczyć dla niej kolejne częstotliwości własne drgań poprzecznych (giętych) z wzoru:

$$\omega_n = \lambda_n^2 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot E \cdot J}{\gamma \cdot A}}$$

gdzie:

$$\lambda_1 = \frac{1,875}{L},$$

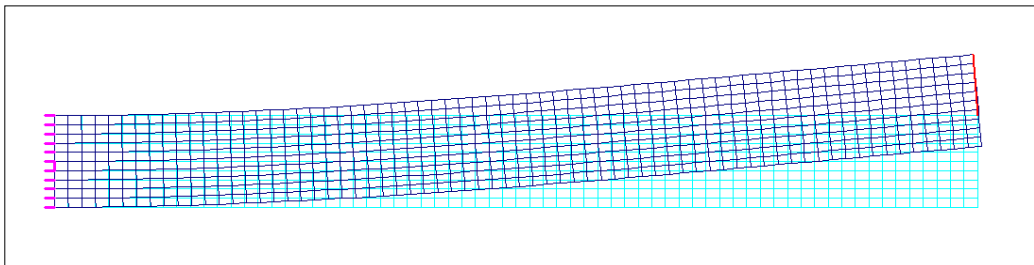
$$\lambda_2 = \frac{4,694}{L},$$

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2L} \cdot \pi; (n > 2)$$

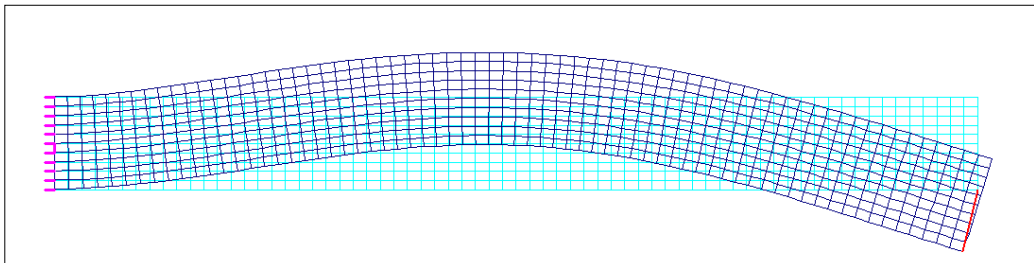
Podstawiając wartości otrzymano pięć pierwszych częstotliwości drgań własnych:

$$\omega_1 = 17,4[1/s], \omega_2 = 109,0[1/s], \omega_3 = 305,3[1/s], \omega_4 = 598,4[1/s], \omega_5 = 988,9[1/s].$$

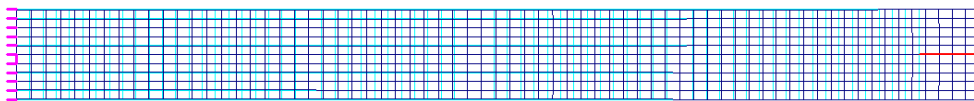
Wybierając w module WYNIKI przycisk Częstotliwości otrzyma się listę częstotliwości. Analizując ją można stwierdzić, że przy pierwszej częstotliwości różnica nie przekracza 1%, a potem zaczyna narastać nawet do 32% przy piątej częstotliwości (teoretycznej). Różnice te biorą się z tego, że przy wyższych częstotliwościach spada stopień podobieństwa tej tarczy do belki. Na poniższych rysunkach pokazano sześć pierwszych postaci drgań własnych. Trzecia postać są to drgania podłużne.



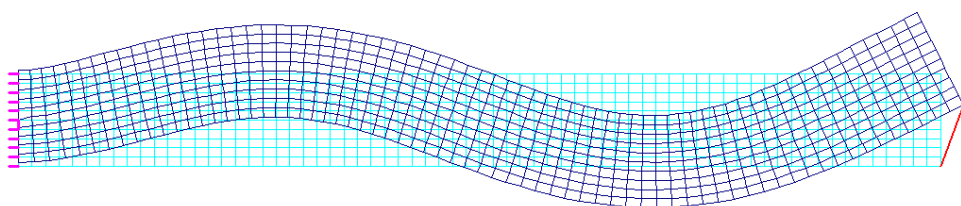
Pierwsza postać drgań własnych



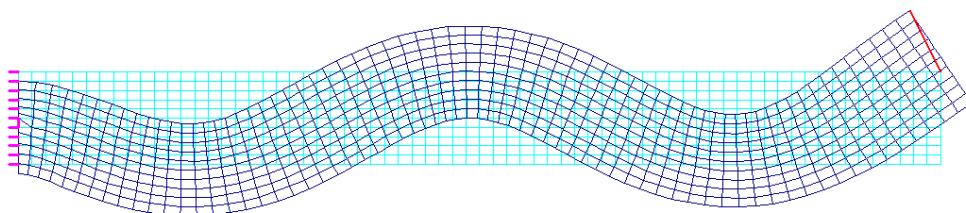
Druga postać drgań własnych



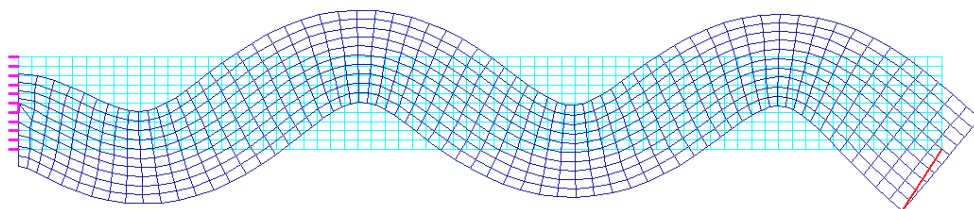
Trzecia postać drgań własnych (drgania podłużne)



Czwarta postać drgań własnych



Piąta postać drgań własnych

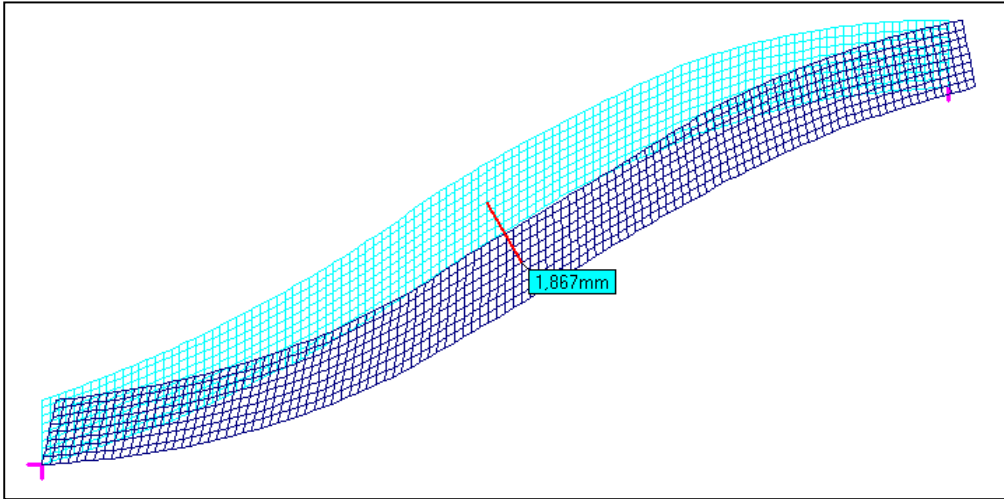


Szósta postać drgań własnych

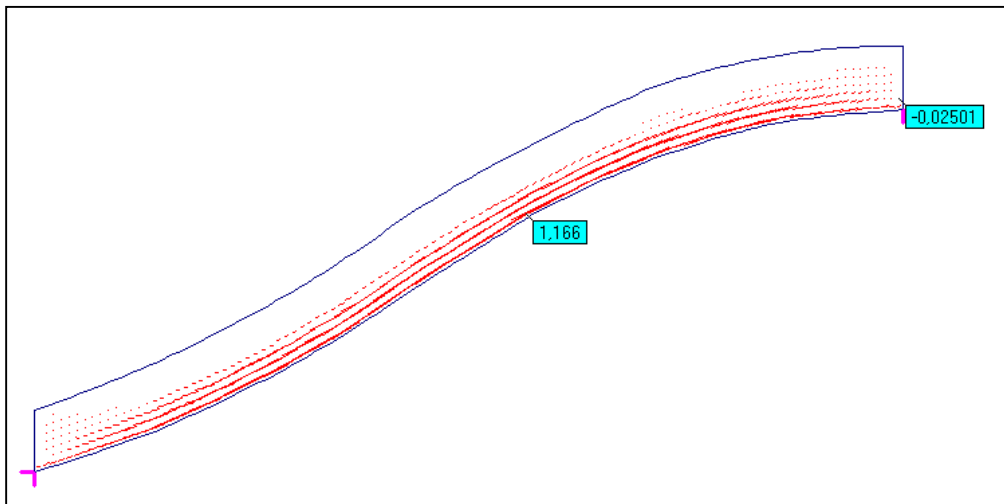
## 62.4. Dźwigar drewniany

W zadaniu DzwigarDrewno zamodelowano dźwigar z drewna klejonego. Dźwigar obciążony jest ciężarem własnym konstrukcji, ciężarem śniegu i parciem wiatru. W pierwszym schemacie zadano ciężar własny modelu, uzupełniony siłami rozłożonymi liniowo od sprowadzonego do jednego dźwigara ciężaru reszty konstrukcji. W drugim schemacie zadano obciążenie typu śnieg. W trzecim obciążenie parciem wiatru. Parcie to zamodelowano obciążeniem liniowym typu ciężar o dwóch składowych: w kierunku osi X i Y.

Na rysunku poniżej pokazano ugięcia tego dźwigara wywołane obciążeniami pierwszego schematu.

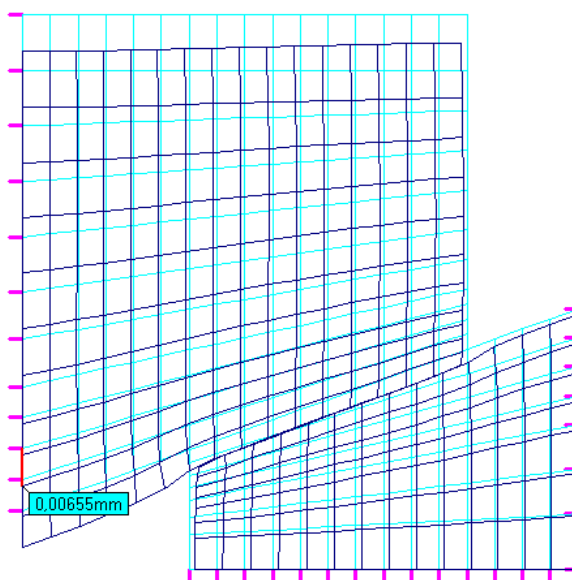


Rozkład naprężeń głównych w tym schemacie pokazano poniżej.

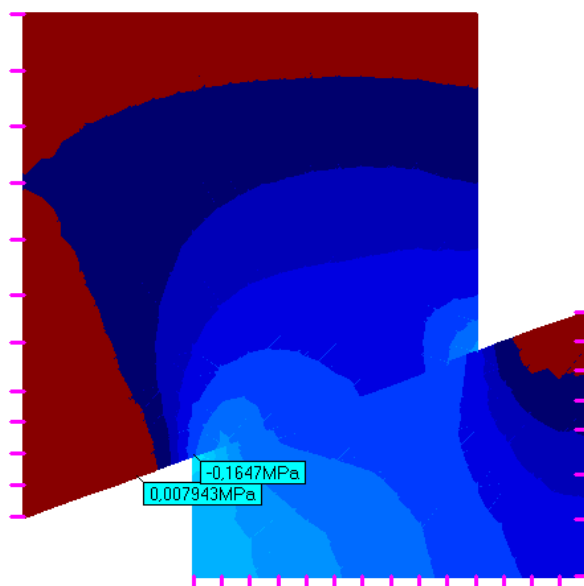


## 62.5. Linia poślizgu

W zadaniu Linia\_Poslizgu zamodelowano układ złożony z dwóch części stykających się na ukośnej linii poślizgu. Na tej linii będą wspólne przemieszczenia w kierunku prostopadłym do niej oraz osobne przemieszczenia w kierunku stycznym. W zadaniu przyjęto podpory sztywne. Układ jest obciążony ciężarem własnym.



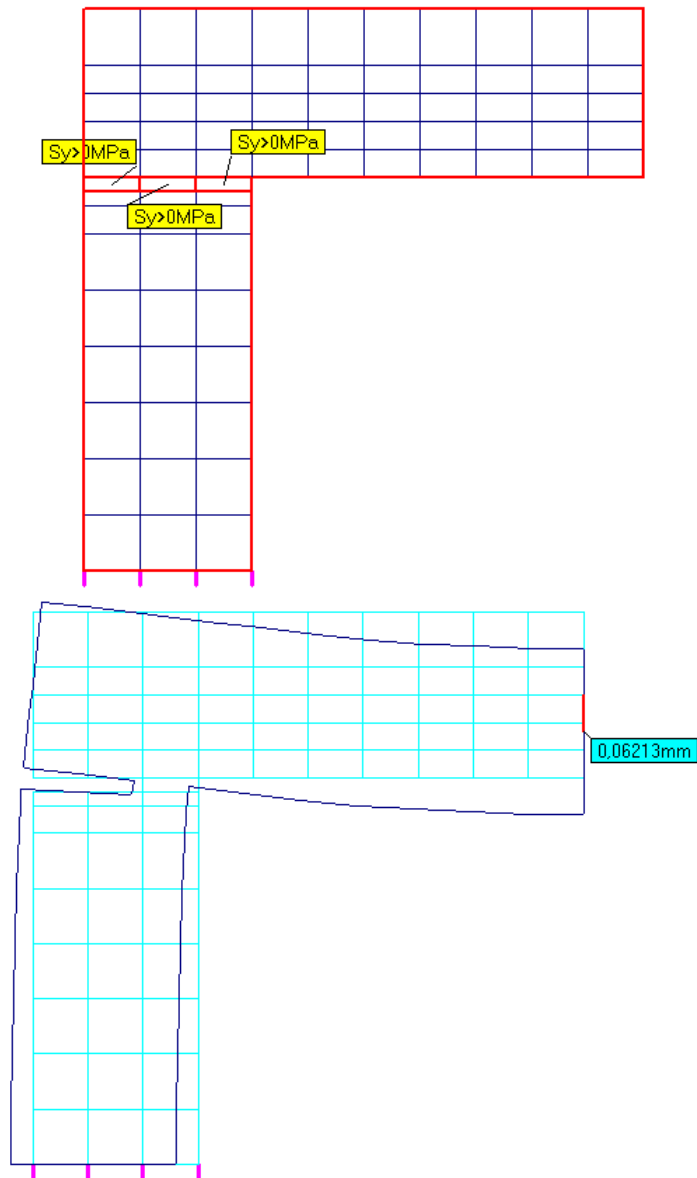
Na rysunku pokazano odkształcenia modelu.



Warstwice naprężeń  $\sigma_y$

## 62.6. Elementy pękające

W zadaniu Pekaj wprowadzono elementy pękające, które umieszczono w warstwie pomiędzy pionową i poziomą częścią modelu. Na rysunku pokazano ich lokalizację oraz zadany warunek pęknięcia. Elementy te znikają, jeśli pojawią się dodatnie naprężenia  $\sigma_y$ .



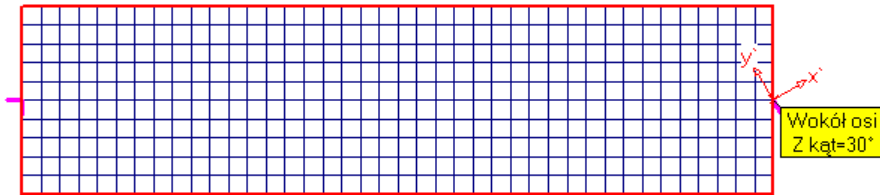
Odształcenia modelu. Widać miejsce gdzie zostały usunięte elementy.

W zadaniach RamaCeglana i RamaCeglanaN zastosowano też elementy pękające. Pierwsze zadanie jest rozwiązaniem liniowym, a w drugim są wyniki po rozwiązaniu nieliniowym.

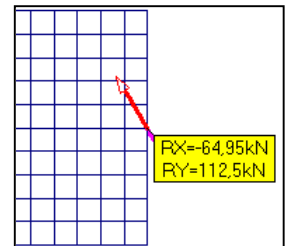
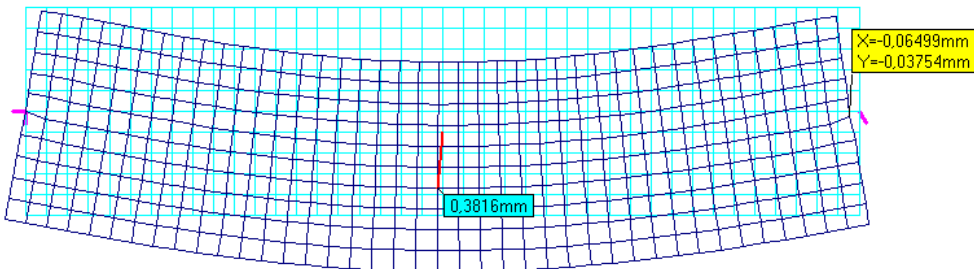


## 62.7. Podpora ukośna

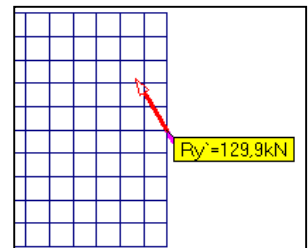
W zadaniu Podpora\_Ukos zadano ukośną podporę. W module DANE w węźle podpartym podporą w kierunku osi Y, wprowadzono węzłowy układ współrzędnych obracając układ globalny o kąt  $30^\circ$  wokół osi Z.



Po rozwiązaniu otrzymano ugięcia modelu. Można zaobserwować, że węzeł podparty tą podporą doznał przemieszczeń poziomych i pionowych.

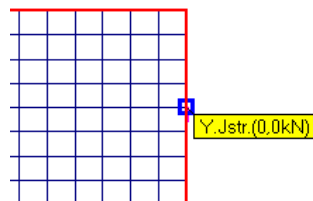


Reakcje w takich węzłach można odczytywać albo w układzie współrzędnych węzłowych i wtedy liczba wartości będzie odpowiadała liczbie składowych podporowych, albo w układzie globalnym i wtedy liczba odczytanych wartości będzie inna niż liczba składowych podporowych. Na rysunku po lewej stronie pokazano odczyt wartości reakcji w układzie współrzędnych globalnych. Natomiast na rysunku po prawej stronie pokazano odczyt wartości podporowych, ale w układzie węzłowym. Widać wyraźnie różnicę wartości. W podobny sposób można zmieniać zakres pokazywanych składowych w listach reakcji.



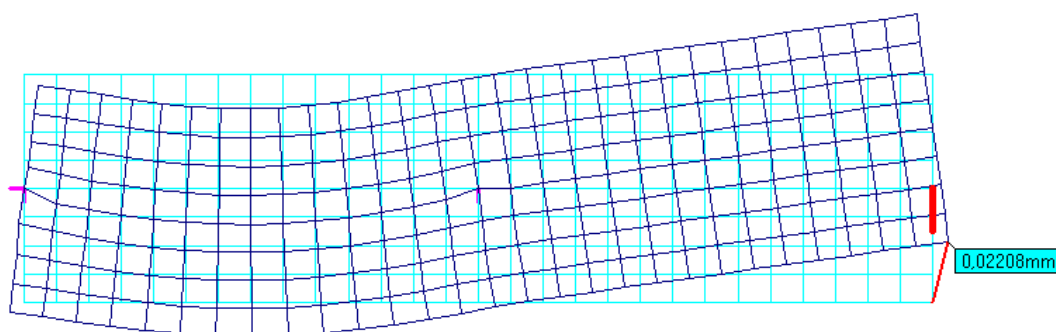
## 62.8. Podpory jednostronne i ograniczone

W zadaniach Podp\_Liniowe, Podp\_Nieliniowe i Podp\_Ograniczone przyjęto taki sam model w postaci tarczy podpartej w trzech miejscach w taki sposób, że zostają utworzone dwa przęsła. Obciążone jest tylko lewe przęsło. W zadaniu Podp\_Liniowe pokazano rozwiązanie liniowe, w którym nie występują efekty związane z nieliniowymi podporami. W zadaniu Podp\_Nieliniowa zadano warunek odrywania się modelu od prawej podpory, jeśli wystąpi w niej ujemna reakcja.

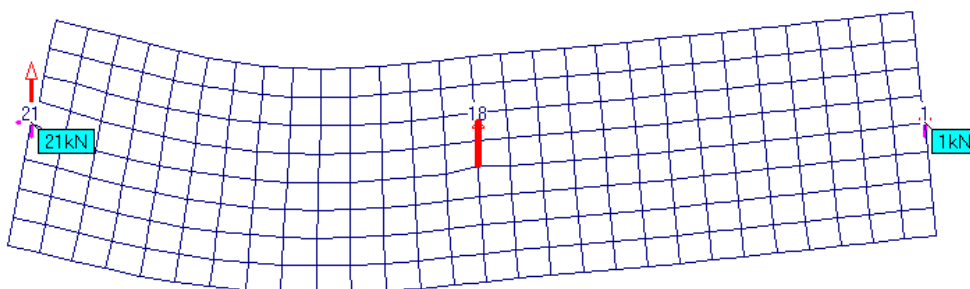


Na rysunku obok pokazano odczyt danych o tej podporze.

Odształcenia modelu po rozwiązaniu nieliniowym pokazano na rysunku poniżej. Grubą kreską zaznaczono nieczynną podporę (w menu Różne włączona opcja Nieczynne podpory).

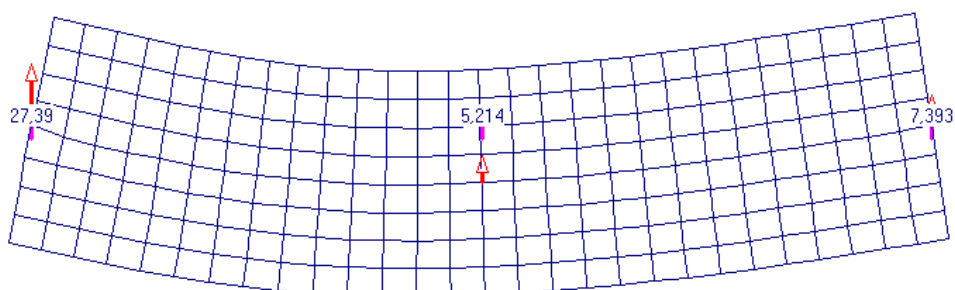
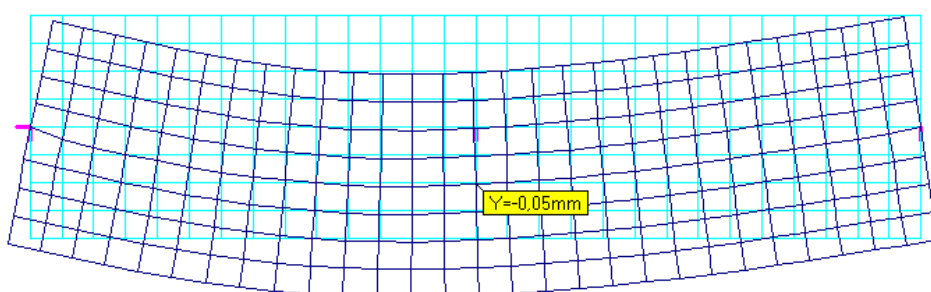
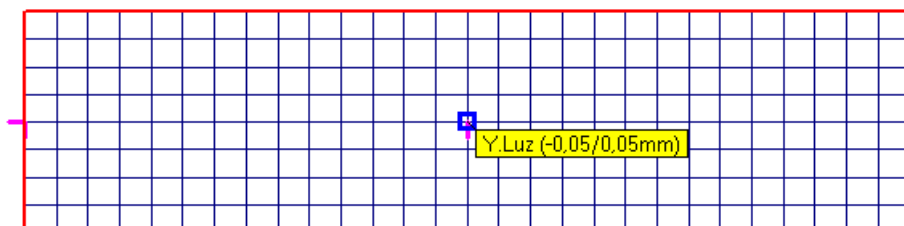


W zadaniu Podp\_Ograniczona wprowadzono warunek ograniczonej nośności w środkowej podporze. Przyjęto, że reakcja nie może być większa od 18kN. Na kolejnym rysunku pokazano ugięcia modelu z wartościami reakcji. Grubą kreską zaznaczono miejsce występowania podpory, która zaczęła pracować nieliniowo.



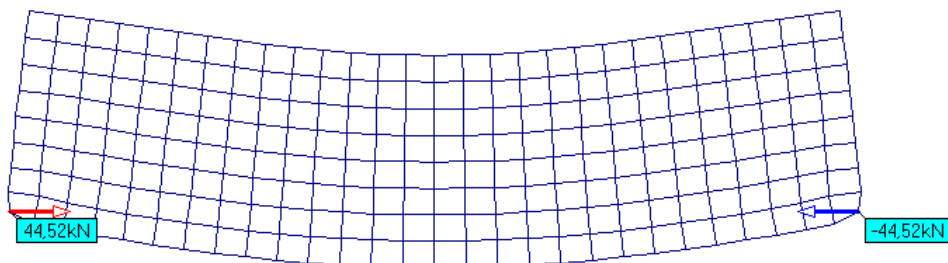
## 62.9. Podpora z luzem

W zadaniu Podp\_Z\_Luzem założono w środkowej podporze luz. Pod wpływem obciążenia luz ten ulega skasowaniu i wtedy pojawia się tam podpora w której program oblicza reakcję.

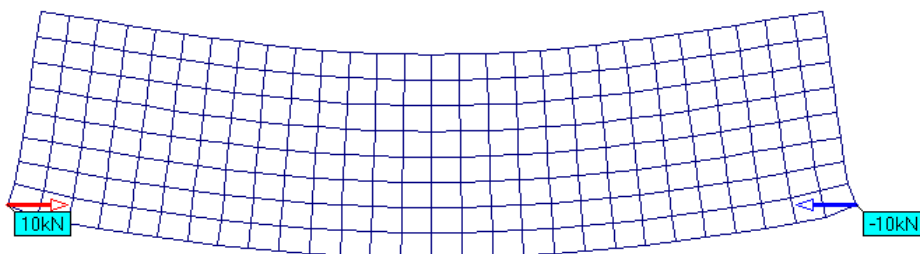


## 62.10. Podpory z tarciem

W zadaniach Podp\_Tarcie i Podp\_Tarcie\_Lin przedstawiono model, w którym wprowadzono warunek tarcia w podparciu. W zadaniu Podp\_Tarcie\_Lin okazano rozwiązanie liniowe, czyli bez warunku tarcia. Poniższy rysunek pokazuje postać odkształcenia modelu oraz wartości reakcji. Jak widać poziome reakcje wynoszą 44,52kN. Pionowe są takie same po 50kN.

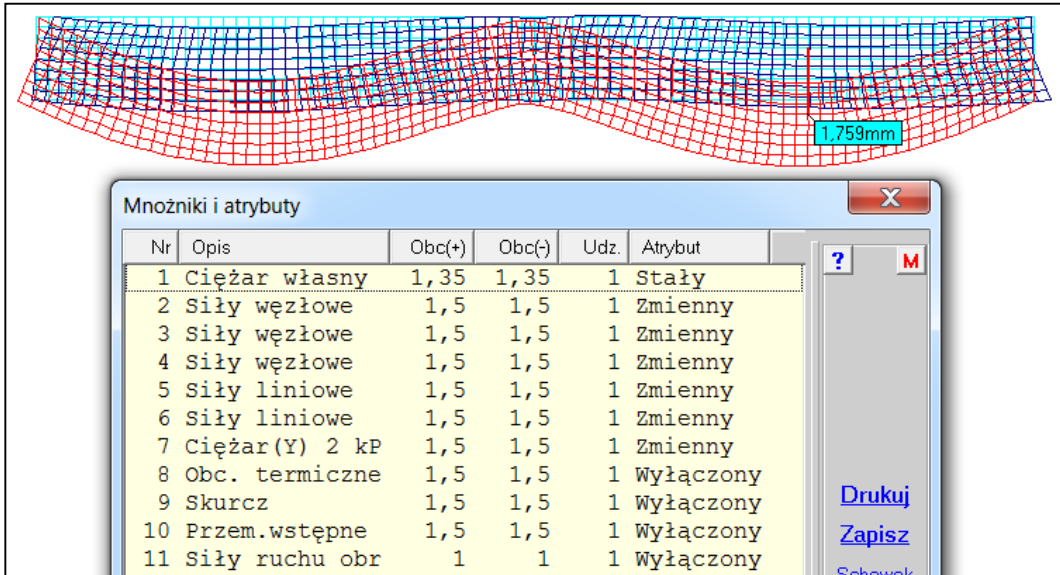


Po wprowadzeniu warunku tarcia do prawej podpory postać odkształcenia oraz wartości reakcji uległa zmianie. Składowa pozioma wynosi teraz 10kN, ponieważ w prawej podporze zadano współczynnik tarcia równy 0,2.

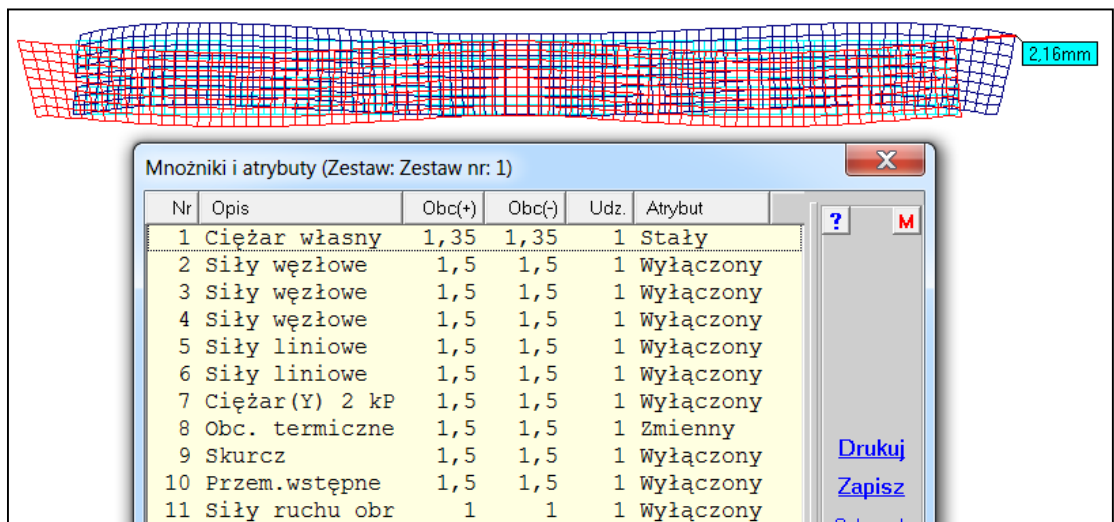


## 62.11. Różne obciążenie

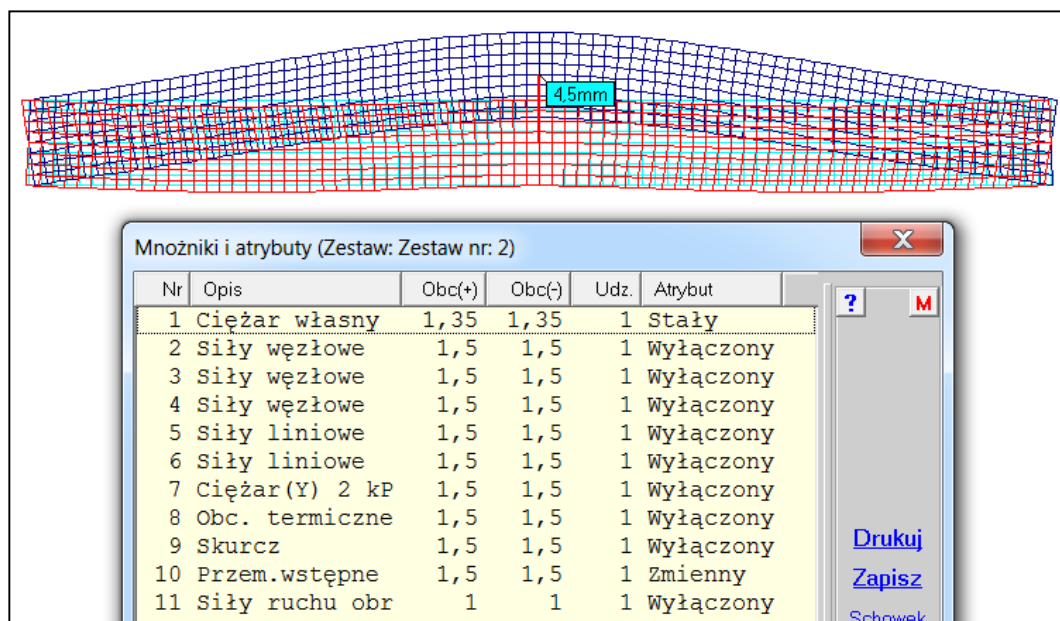
W zadaniu Różne\_Obc pokazano jak można wprowadzić różne zestawy atrybutów i mnożników w zadaniu. Po włączeniu bazowego zestawu w którym uwzględnia się tylko obciążenia mechaniczne otrzymano następujący obraz ugięć ekstremalnych.



Obraz ugięć zmienił się po wybraniu drugiego zestawu atrybutów w którym uwzględniano tylko ciężar własny i obciążenia termiczne.



Jeszcze inny obraz otrzymano po wybraniu trzeciego zestawu. Atrybutów.

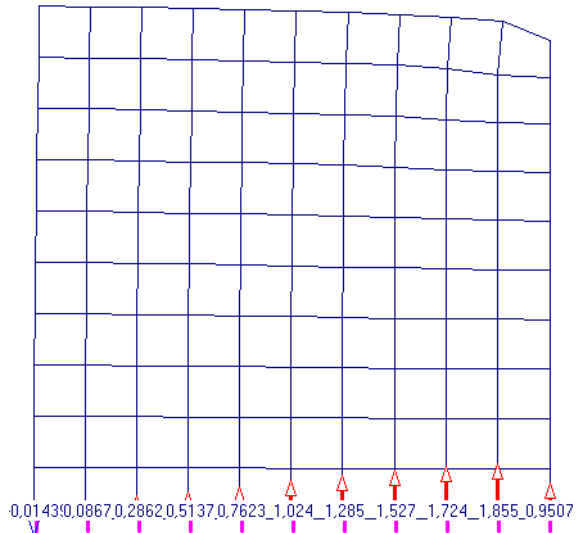
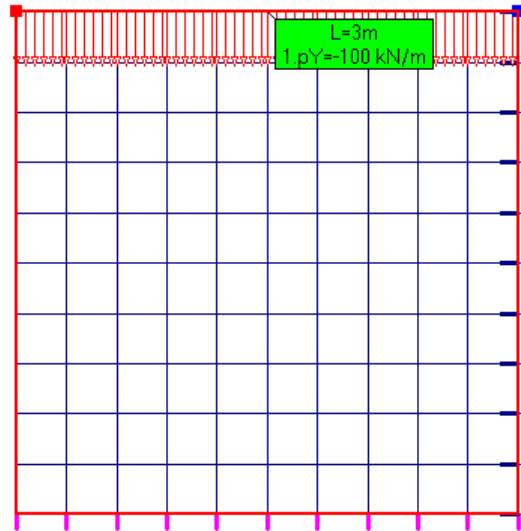


## 62.12. Symetria w tarczy

W zadaniu SymetriaT pokazano model w którym na prawej pionowej krawędzi zadano warunek symetrii. W tarczy warunek taki sprowadza się do odebrania odpowiedniego przemieszczenia, w tym wypadku przemieszczenia w kierunku osi X. W zadaniu przyjęto cztery schematy obciążenia: ciężar własny który jest obciążeniem z założenia symetrycznym względem założonej osi, obciążenie siłą skupioną skierowaną wzdłuż osi symetrii oraz obciążenia liniowe przyłożone raz do górnej krawędzi i skierowane pionowo oraz przyłożone do pionowej środkowej linii i skierowane poziomo.

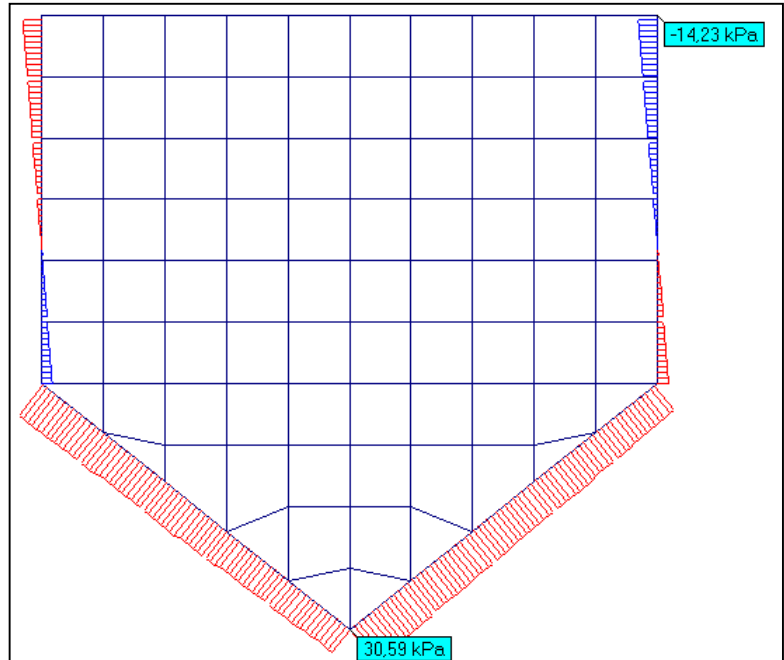
Łączne obciążenie skupione (drugi schemat) działające na cały obiekt jest dwa razy większe od zadanego w danych. Przy zadawaniu obciążeń działających w osi symetrii należy o tym pamiętać. Ciekawy jest czwarty schemat w którym wprowadzenie jednej linii obciążenia rozłożonego powoduje ścisnięcie części tarczy leżącej pomiędzy linią działania obciążenia i osią symetrii.

Poniżej pokazano postać odkształcenia modelu wywołanego obciążeniem siłą skupioną działającą w osi symetrii. Warto zwrócić uwagę na rozkład reakcji. Na pierwszy rzut oka największa jest reakcja tuż przed osią symetrii. Jednak faktycznie największa reakcja jest w osi symetrii. Ze względu na ten warunek jej wartość jest połową rzeczywistej reakcji. Wystarczy pomnożyć tę reakcję przez dwa i otrzyma się rzeczywistą wartość.

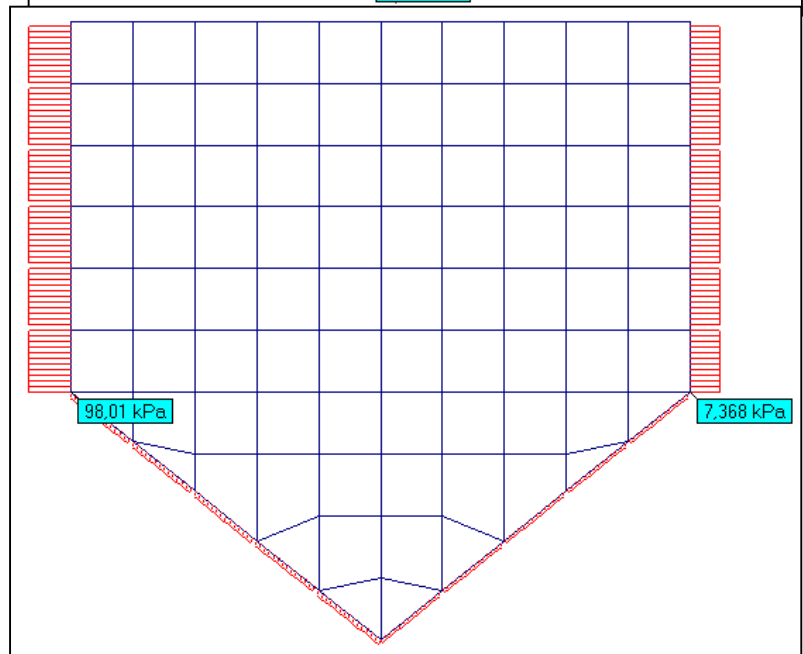


## 62.13. Podłoże Winklera

W zadaniu Winkler zadano podłoże o różnych sztywnościach i ze składnikiem stycznym na dół modelu i pionowe krawędzie. Obciążeniem jest ciężar własny i siła skupiona przyłożona niesymetrycznie. Obok pokazano rozkład odporów normalnych wywołany działaniem siły.



Obok pokazano rozkład odporów stycznych.

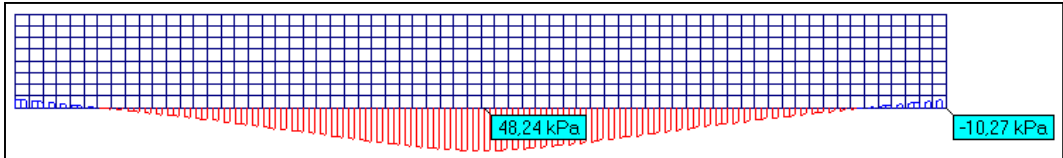




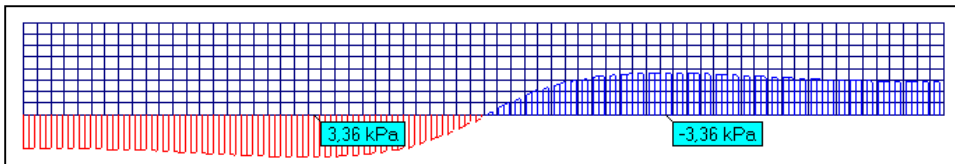
## 62.14. Nieliniowe podłoże Winklera

W zadaniach Winkler\_Lin, Winkler\_Nielin wprowadzono tarczę w postaci belki leżącej na sprężystym podłożu. Zadano podłoże o składnikach prostopadłych i stycznych, do tego związanych tarciami. Tarczę obciążono siłą skupioną przyłożoną w środku długości. Na poniższych rysunkach pokazano rozkłady odporów podłoża: prostopadłego i stycznego, obliczone przy założeniach liniowych.

Ponieważ w rozkładzie odporu gruntu, prostopadłego do linii przyłożenia, widać strefy ujemnych wartości wprowadzono do opisu warunków jednostronności gruntu, oraz ograniczonej nośności.

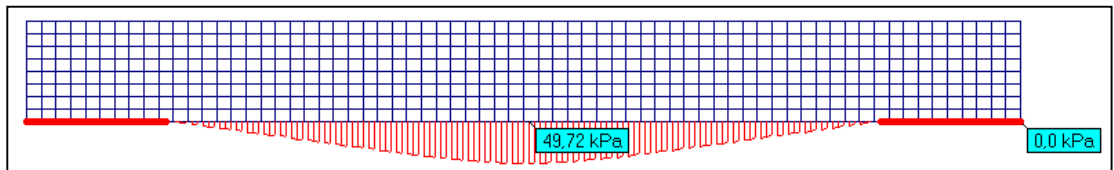


Rozkład odporów dla rozwiązania liniowego

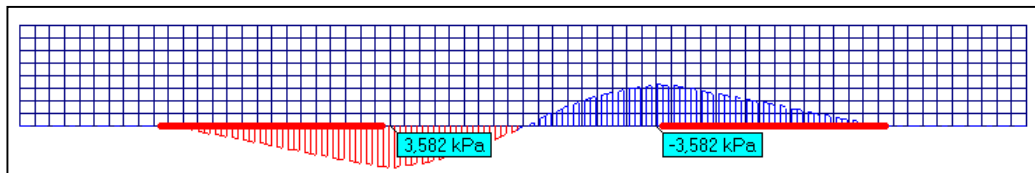


Rozkład odporów stycznych w rozwiązaniu liniowym

Po przeprowadzeniu obliczeń nieliniowych (zadanie Winkler\_Nielin) otrzymano nową postać odkształcenia, nowe rozkłady odporów, prostopadłego i stycznego oraz innym rozkład naprężeń



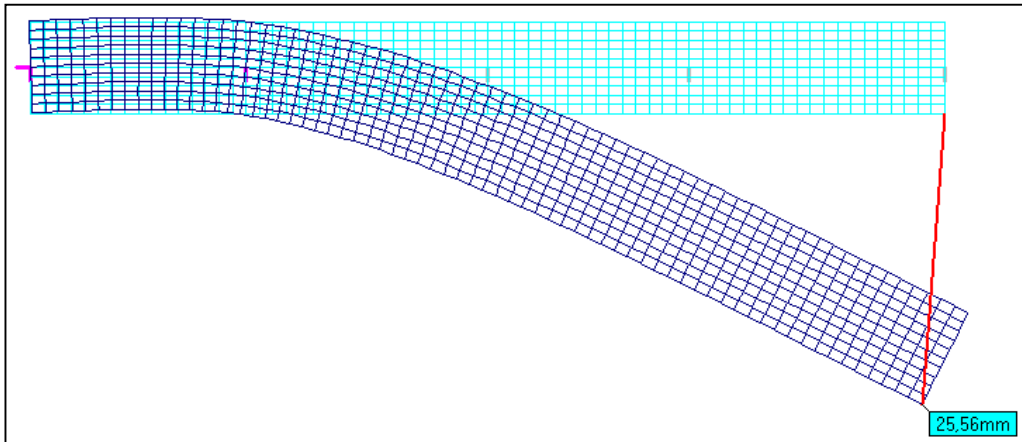
Rozkład odporów dla rozwiązania nieliniowego - zaznaczono nieczynne podłoże



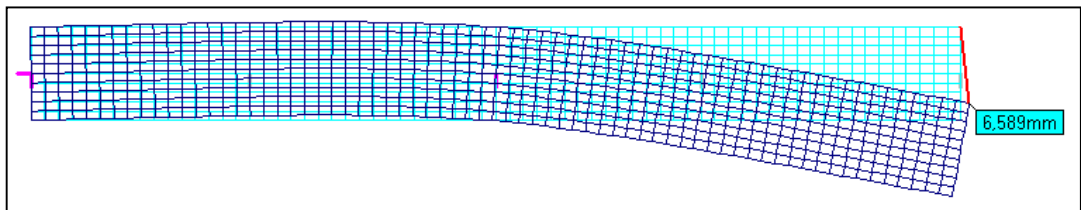
Rozkład odporów stycznych w rozwiązaniu nieliniowym - zaznaczono podpory z tarcie rozwiniętym

## 62.15. Zmienne podpory

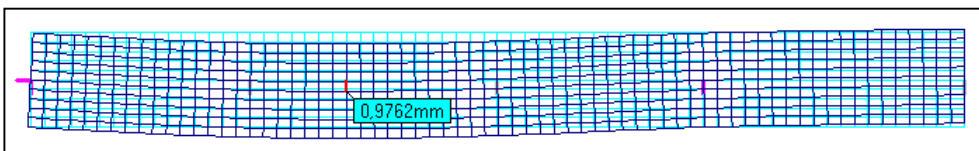
W zadaniu Zmienne\_Podpory wprowadzono różny układ podporowy w każdym schemacie obciążenia. Przyjęto cztery schematy. W każdym jest tylko działanie ciężaru własnego.



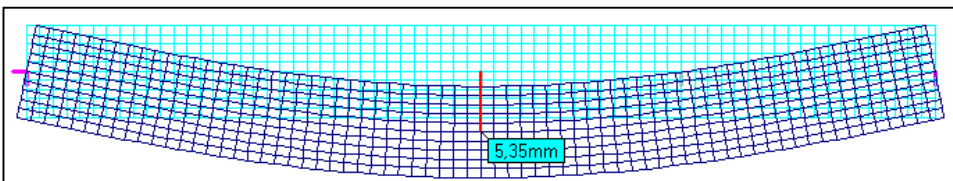
Pierwszy schemat. Czynne dwie kolejne podpory z lewej strony. Skala dwa razy mniejsza niż w pozostałych schematach



Drugi schemat. Czynna podpora lewa skrajna i trzecia z kolei.



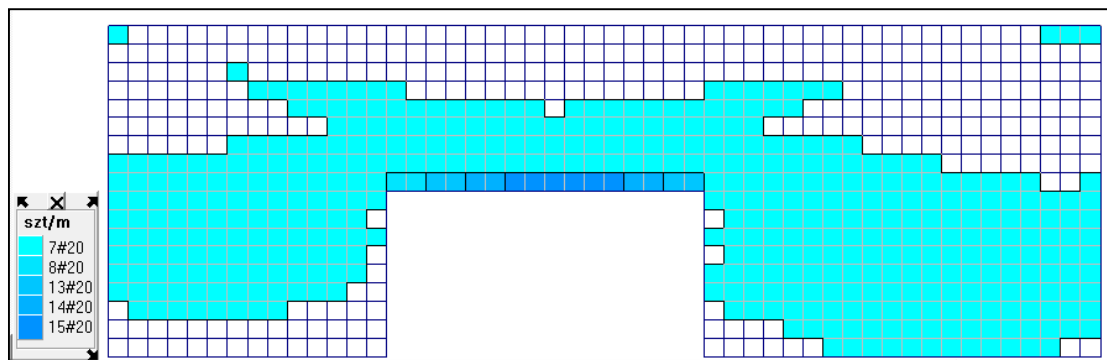
Trzeci schemat. Czynna podpora lewa skrajna i przedostatnia z prawej strony.



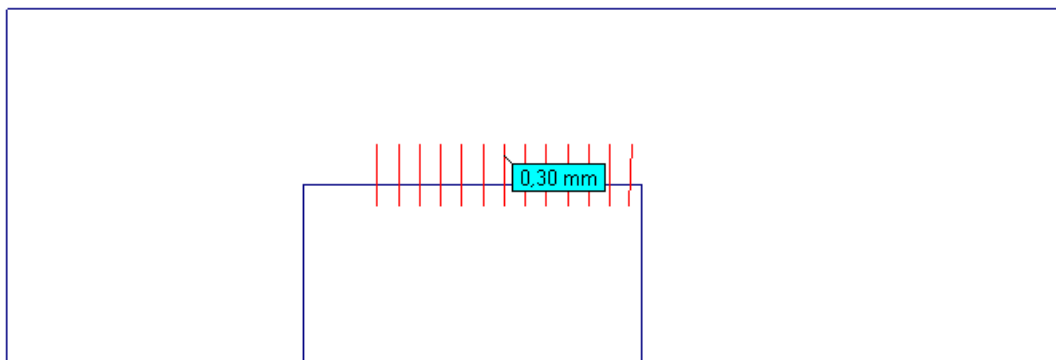
Czwarty schemat. Czynne podpory skrajne.

## 62.16. Zbrojenie tarczy żelbetowej

W zadaniu Zelbet zazbrojono tarczę żelbetową. W danych przyjęto obciążenia cząstkowe; w pierwszym schemacie jest tylko zadany ciężar własny, a w drugim obciążenie liniowe. Po ustaleniu na planszy założeń, gatunku stali, średnic wkładek, klasy ekspozycji i ograniczeniu rozwarcia rys do 0,3 mm otrzymano rozkład niezbędnego zbrojenia w tarczy. Na rysunkach poniżej pokazano rozkład zbrojenia w kierunku X (poziomego) i w kierunku osi Y (pionowego).



Rozkład rys pokazano poniżej.



## E 63. Przykładowe zadania OS

W folderze \Przykłady\_OS zamieszczono 5 przykładowych zadań osiowo-symetrycznych. W każdym zadano różne obciążenia najczęściej takie dla którego są rozwiązania teoretyczne i wyniki numeryczne porównano z wartościami obliczonymi z wzorów.

### 63.1. Zadanie Krazek

W tym zadaniu zamodelowano jako zadanie osiowosymetryczne płytę kołową o średnicy 6m, grubości 0,3m, podpartą na obwodzie. Płyta jest wykonana z materiału o module sztywności  $E = 29961\text{MPa}$ , liczbie Poisson'a  $\nu = 0,2$  i ciężarze właściwym  $\gamma = 25\text{kN/m}^3$ . Sztywność płyty jest równa:

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)}$$

gdzie:

$E$  – moduł Younga = 29961MPa,

$\nu$  - liczba Poisson'a = 0,2,

$t$  – grubość płyty = 0,3m.

Po podstawieniu tych wartości sztywność  $D = 70221\text{kNm}$ .

#### 63.1.1. Obciążenie siłą skupioną

W pierwszym schemacie zadano obciążenie siłą skupioną przyłożoną do środka płyty. Maksymalne ugięcie płyty kołowej obciążonej w ten sposób jest równe:

$$w = \frac{(3 + \nu) \cdot P \cdot R^2}{16\pi \cdot (1 + \nu) \cdot D}$$

gdzie:

$P$  – siła skupiona = 100kN,

$R$  – promień płyty = 3m.

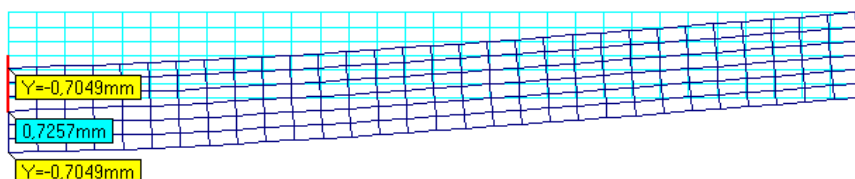
Po podstawieniu wartości otrzymano ugięcie teoretyczne

$$w = 0,6799\text{mm}.$$

Maksymalne ugięcie obliczone numerycznie wynosi (to nie jest wartość z punktu przyłożenia)

$$w_{\text{MES}} = 0,7049\text{mm}$$

i jest większe od wartości teoretycznej o 3,7%.



## Zadania

---

Moment promieniowy zmienia się wzdłuż promienia wg wzoru:

$$m_r = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \cdot \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

dla promienia  $r = 0,05\text{m}$  (środek ciężkości elementu nr 1) jest on równy:

$$m_r = 39,098 \text{ kNm/m}$$

Moment ten wywołuje naprężenia obwodowe określone wzorem:

$$\sigma_o = \frac{12 \cdot m_r \cdot z}{t^3}$$

współrzędna z środka ciężkości elementu nr 1 jest równa:  $z = 0,125\text{m}$ . Naprężenie obwodowe w tym miejscu jest równe:

$$\sigma_o = 2,172\text{MPa}$$

Wartość obliczona numerycznie wynosi:

$$\sigma_{oMES} = 2,117 \text{ MPa}$$

i jest mniejsza od wartości teoretycznej o 2,6%.

Moment obwodowy zmienia się wzdłuż promienia wg wzoru:

$$m_o = \frac{P}{4\pi} \cdot \left[ 1 - \nu - (1 + \nu) \cdot \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right]$$

dla promienia  $t = 0,05\text{m}$  jest on równy:

$$m_o = 45,46\text{kNm/m.}$$

Moment ten wywołuje naprężenie promieniowe określone wzorem:

$$\sigma_r = \frac{12 \cdot m_o \cdot z}{t^3}$$

w środku ciężkości elementu nr 1 ( $z = 0,125\text{m}$ ) wynosi ono:

$$\sigma_r = 2,526\text{MPa}$$

Wartość obliczona numerycznie wynosi:

$$\sigma_{rMES} = 2,434 \text{ MPa}$$

i jest mniejsza od wartości teoretycznej o 3,8%.

### 63.1.2. Obciążenie ciężarem własnym

W drugim schemacie zadano obciążenie ciężarem własnym. Łączny ciężar modelu wynosi:  $Q = 212,1 \text{ kN}$ . Obciążenie powierzchniowe odpowiadające tej wartości jest równe:

$$q = \frac{Q}{\pi \cdot R^2} = 7,5 \text{ kPa}$$

Maksymalne ugięcie płyty kołowej obciążonej ciśnieniem  $q$  jest określone wzorem:

$$w = \frac{(5 + \nu) \cdot q \cdot R^4}{64 \cdot (1 + \nu) \cdot D}$$

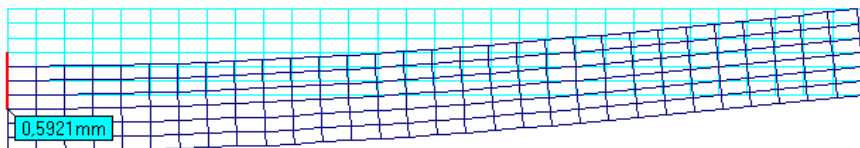
podstawiając odpowiednie wartości otrzymano ugięcie:

$$w = 0,5858 \text{ mm}$$

Ugięcie obliczone numerycznie jest równe:

$$w_{\text{MES}} = 0,5921 \text{ mm}$$

i jest większe od wartości teoretycznej o 1%.



Moment promieniowy zmienia się wzdłuż promienia zgodnie z wzorem:

$$m_r = \frac{q}{16} (3 + \nu) \cdot (R^2 - r^2)$$

dla środka ciężkości elementu nr 1 promień jest równy:  $r = 0,05 \text{ m}$ . Moment w tym miejscu wynosi:

$$m_r = 13,496 \text{ kNm/m}$$

Moment ten wywołuje naprężenie obwodowe równe:

$$\sigma_o = 0,7498 \text{ MPa}$$

Naprężenie obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{o\text{MES}} = 0,6698 \text{ MPa}$$

i jest mniejsze o 12% od wartości teoretycznej.

Moment obwodowy zmienia się wzdłuż promienia zgodnie z wzorem:

## Zadania

---

$$m_o = \frac{q}{16} \left[ (3 + \nu) \cdot R^2 - (1 - 3\nu) \cdot r^2 \right]$$

dla środka ciężkości elementu nr 1 moment ten jest równy:

$$m_o = 13,499 \text{ kNm/m}$$

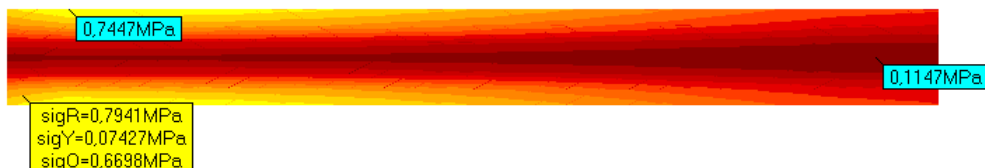
Moment ten wywołuje naprężenie promieniowe które w środku elementu nr 1 jest równe:

$$\sigma_r = 0,75 \text{ MPa}$$

Naprężenie obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{rMES} = 0,7941 \text{ MPa}$$

i jest większe od wartości teoretycznej o około 6%.



### 63.1.3. Obciążenie ciśnieniem

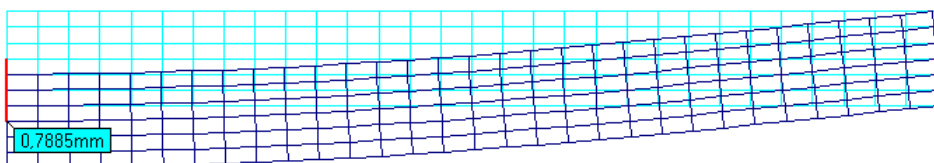
W trzecim schemacie zadano obciążenie powierzchniowe o wartości:  $q = 10\text{kPa}$ . Ugięcie teoretyczne wynosi:

$$w = 0,7811\text{mm}$$

Ugięcie obliczone numerycznie wynosi:

$$w_{\text{MES}} = 0,7885\text{mm}$$

i jest większe od wartości teoretycznej o mniej niż 1%.



Naprężenie obwodowe obliczone teoretycznie jest równe:

$$\sigma_o = 0,9994\text{MPa}$$

Naprężenie obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{o\text{MES}} = 0,8929\text{MPa}$$

i jest mniejsze o 12% od wartości teoretycznej.

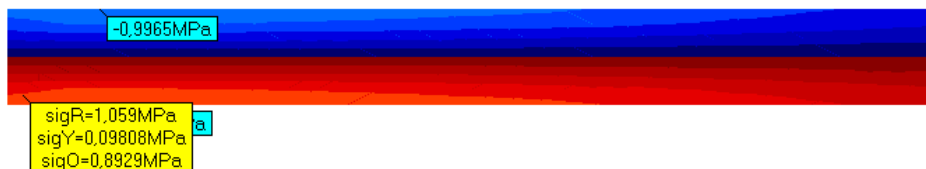
Naprężenie promieniowe obliczone teoretycznie jest równe:

$$\sigma_r = 0,9996\text{MPa}$$

Naprężenie obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{r\text{MES}} = 1,059\text{MPa}$$

i jest większe o 6% od wartości teoretycznej.





### 63.1.4. Obciążenie termiczne

W czwartym schemacie założono obciążenie różnicą temperatur:  $\Delta T = 20^\circ$ . Różnica temperatur spowoduje ugięcie płyty kołowej o wartość:

$$f = \frac{t}{\Delta T \cdot \alpha} \left[ 1 - \cos \left( R \cdot \frac{\Delta T}{t} \cdot \alpha \right) \right]$$

gdzie:

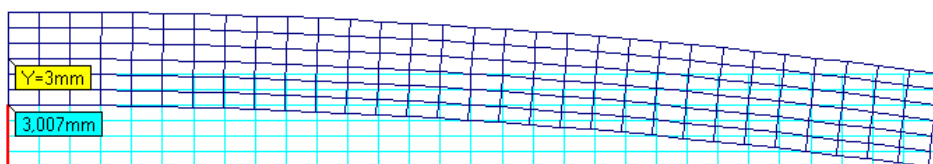
$\alpha$  - współczynnik rozszerzalności liniowej =  $0,00001[1/^\circ\text{C}]$

Po podstawieniu wartości otrzymano ugięcie równe:

$$f = 3\text{mm}$$

Ugięcie obliczone numerycznie dla węzła ze środka grubości też wynosi:

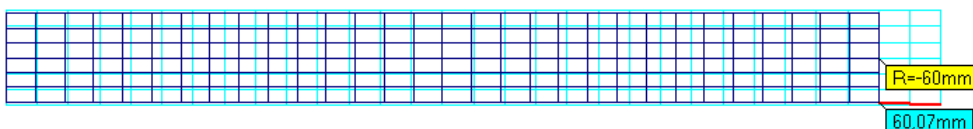
$$f_{\text{MES}} = 3\text{mm}$$



Ponieważ warunki podparcia pozwalają na swobodne odkształcanie się płyty, stąd naprężenia w tym schemacie są równe zero.

### 63.1.5. Obciążenie skurczem

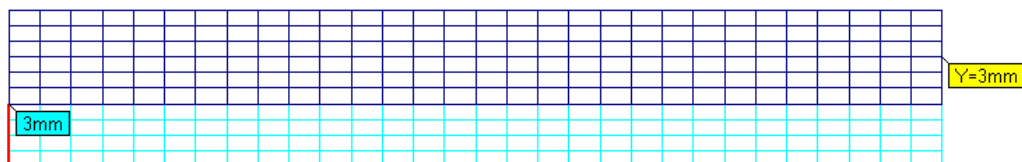
W piątym schemacie założono skurcz równy 2%. Dla promienia 3 m promieniowe przemieszczenie będzie równe: 60mm.



Ponieważ warunki podparcia pozwalają na swobodne odkształcanie się płyty, stąd naprężenia w tym schemacie są równe zero.

### 63.1.6. Przesunięcie wstępne w podporze

W szóstym schemacie założono wstępne przesunięcie w podporze o wartości 3mm. Układ podporowy pozwala na przesunięcie całego krążka bez odkształceń i bez naprężeń.



### 63.1.7. Obciążenie siłami odśrodkowymi

W siódmym schemacie założono obciążenie siłami odśrodkowymi wywołanymi obrotami:  $n = 1000 \text{ obr/min}$ . Prędkość kątowna dla tych obrotów wynosi:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$$

Promieniowe przesunięcia dla pełnego wirującego krążka są opisane wzorem:

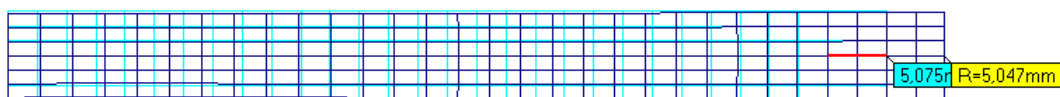
$$u = \frac{1 - \nu^2}{8E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \left( \frac{3 + \nu}{1 + \nu} R^2 - r^2 \right)$$

Dla zewnętrznej krawędzi  $r = R$  i promieniowe przesunięcie jest równe:

$$u = 5,047 \text{ mm}$$

Przesunięcie obliczone numerycznie jest równe:

$$u_{\text{mes}} = 5,047$$



Naprężenia promieniowe są opisane wzorem:

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot (R^2 - r^2)$$

dla środka ciężkości elementu nr 1 promień jest równy:  $r = 0,05 \text{ m}$ . Naprężenie promieniowe w tym miejscu jest równe:

$$\sigma_r = 100,6 \text{ MPa}$$

Naprężenie obliczone numerycznie wynosi:

$$\sigma_{r\text{MES}} = 107 \text{ MPa}$$

i jest o 6% większe od wartości teoretycznej.

Naprężania obwodowe są z kolei opisane wzorem:

## Zadania

---

$$\sigma_o = \frac{3+\nu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot \left( R^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \cdot r^2 \right)$$

Naprężenie obwodowe dla elementu nr 1 wynosi:

$$\sigma_o = 100,6\text{MPa}$$

Naprężenie obliczone numerycznie wynosi:

$$\sigma_{oMES} = 90,5\text{MPa}$$



i jest o 11% mniejsze od wartości teoretycznej.

## 63.2. Zadanie Rura

W tym zadaniu zamodelowano rurę grubościenną. Średnica wewnętrzna rury jest równa 6m, średnica zewnętrzna jest równa 12m. Zatem grubość ścianki rury jest równa 3m. Rura ma długość 12m. Przyjmując poziomą płaszczyznę symetrii ograniczono wysokość modelu do 6m. Rura jest wykonana z materiału o module Young'e'a  $E = 29900\text{MPa}$ , liczbie Poisson'a  $\nu = 0,2$  i współczynnika liniowej rozszerzalności  $\alpha = 0,00001 [1/^{\circ}\text{C}]$ .

### 63.2.1. Obciążenie ciśnieniem

W pierwszym schemacie zadano obciążenie ciśnieniem wewnętrznym  $p = 1\text{MPa}$ . Promieniowe przemieszczenie ścianki wewnętrznej jest opisane wzorem:

$$u_w = \frac{p \cdot \left[ (1-\nu) \cdot R_w^3 + (1+\nu) \cdot R_w \cdot R_z^2 \right]}{E \cdot (R_z^2 - R_w^2)}$$

gdzie:

$R_w$  – promień wewnętrzny = 3m,

$R_z$  – promień zewnętrzny = 6m.

Podstawiając wartości obliczono promieniowe przemieszczenie ścianki wewnętrznej:

$$u_w = 0,1869\text{mm}$$

Promieniowe przemieszczenie obliczone numerycznie jest równe:

$$u_{w\text{MES}} = 0,187\text{mm}$$

i jest prawie identyczne wartości teoretycznej.

Promieniowe przemieszczenie ścianki zewnętrznej jest opisane wzorem:

$$u_z = \frac{2p \cdot R_w^2 \cdot R_z}{E \cdot (R_z^2 - R_w^2)}$$

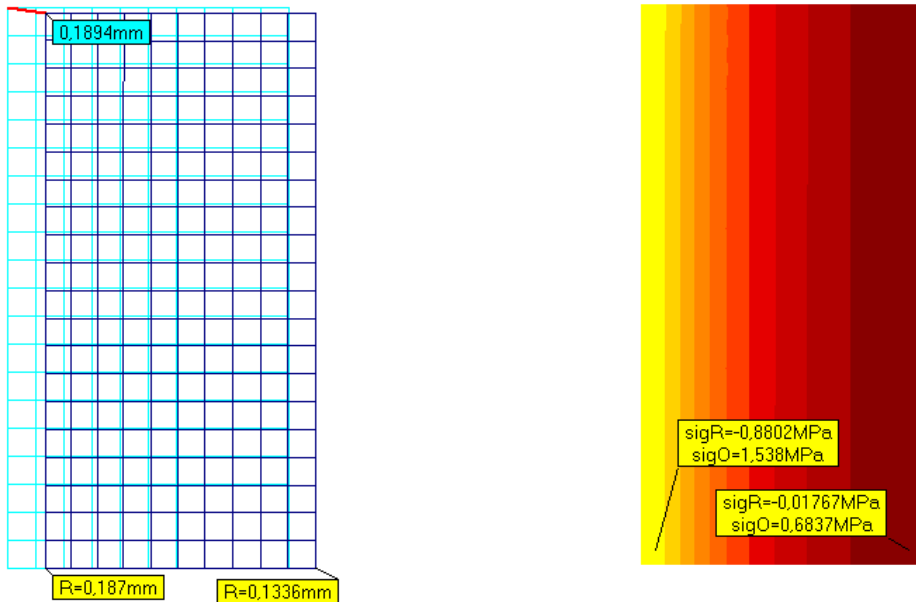
Podstawiając wartości otrzymano przemieszczenie:

$$u_z = 0,1335\text{mm}$$

Przemieszczenie obliczone numerycznie jest równe:

$$u_{z\text{MES}} = 0,1336\text{mm}$$

i też jest prawie równe wartości teoretycznej.



Napężenie promieniowe  $\sigma_r$  w takiej rurze zmienia się zgodnie z wzorem:

$$\sigma_r = \frac{p \cdot R_w^2}{R_z^2 - R_w^2} \left( 1 - \frac{R_z^2}{r^2} \right)$$

a napężenie obwodowe  $\sigma_o$  jest opisane wzorem:

$$\sigma_o = \frac{p \cdot R_w^2}{R_z^2 - R_w^2} \left( 1 + \frac{R_z^2}{r^2} \right)$$

Dla elementu nr 1 promień środka ciężkości jest równy  $r = 3,15m$ . Napężenie promieniowe jest równe:

$$\sigma_r = -0,876MPa$$

Napężenie promieniowe obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{rMES} = -0,8802MPa$$

i jest większe o 0,5% od wartości teoretycznej. Dla tego samego elementu napężenie obwodowe jest równe:

$$\sigma_o = 1,543MPa$$

Napężenie obwodowe obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{oMES} = 1,538MPa$$

i jest mniejsze od wartości teoretycznej o 0,3%.

Dla elementu nr 10 promień środka ciężkości jest równy  $r = 5,85\text{m}$ . Naprężenie promieniowe jest równe:

$$\sigma_r = -0,01731\text{MPa}$$

Naprężenie promieniowe obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{r\text{MES}} = -0,01767\text{MPa}$$

i jest większe o 2% od wartości teoretycznej. Dla tego samego elementu naprężenie obwodowe jest równe:

$$\sigma_o = 0,684\text{MPa}$$

Naprężenie obwodowe obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{o\text{MES}} = 0,6837\text{MPa}$$

i jest mniejsze od wartości teoretycznej o mniej niż 0,1%

### 63.2.2. Obciążenie temperaturą

W drugim schemacie zadano stałe pole temperatury równe  $20^\circ\text{C}$ . Promieniowe przemieszczenie ścianki wewnętrznej jest równe:

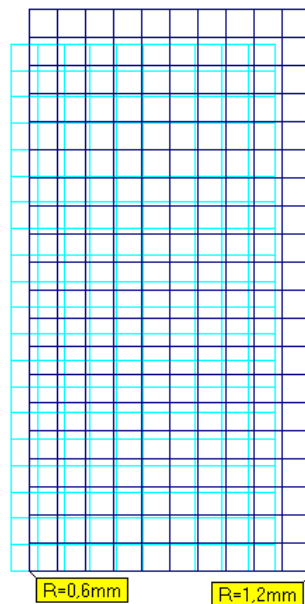
$$u_w = R_w \propto T = 0,6\text{mm}$$

a ścianki zewnętrznej jest równe:

$$u_z = R_z \propto T = 1,2\text{mm}$$

Wartości obliczone numerycznie są identyczne. Również przemieszczenia poosiowe obliczone teoretycznie i wyznaczone numerycznie są identyczne.

Ponieważ warunki brzegowe modelu pozwalają na swobodne odkształcenia termiczne stąd naprężenia są zerowe.



### 63.2.3. Obciążenie siłami odśrodkowymi

W trzecim schemacie zadano obciążenie siłami odśrodkowymi wywołanymi obrotami  $n = 100 \text{ obr/min}$ . Prędkość kątowna przy tych obrotach wynosi:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = 0,001047 \frac{1}{s}$$

Promieniowe przemieszczenie jest opisane wzorem:

$$u = \frac{3+\nu}{8} \cdot \frac{\gamma \cdot \omega^2}{g} \left[ (1-\nu) \cdot (R_z^2 + R_w^2) \cdot r + (1+\nu) \frac{R_z^2 \cdot R_w^2}{r} - \frac{1-\nu^2}{3+\nu} \cdot r^3 \right]$$

Przemieszczenie ścianki wewnętrznej jest równe:

$$u_w = 0,8577 \text{ mm}$$

w modelu wartość tego przemieszczenia jest równa:

$$u_{wMES} = 0,8684 \text{ mm}$$

i jest większe o 1,2% od wartości teoretycznej.

Przemieszczenie ścianki zewnętrznej jest równe:

$$u_z = 0,8073 \text{ mm}$$

w modelu wartość tego przemieszczenia jest równa:

$$u_{zMES} = 0,8175 \text{ mm}$$

i jest większe o 1,2% od wartości teoretycznej.

Napężenia promieniowe zmieniają się wzdłuż promienia zgodnie z wzorem:

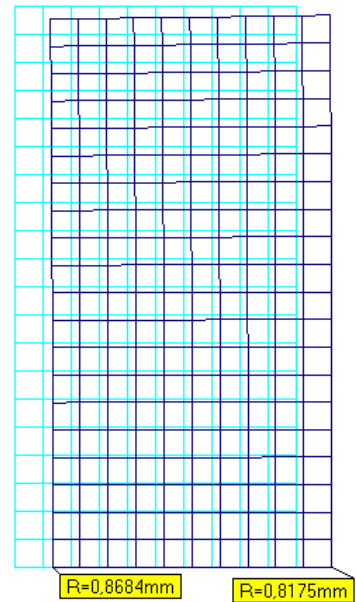
$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \cdot \frac{\gamma \cdot \omega^2}{g} \left[ 1 + \left( \frac{R_w}{R_z} \right)^2 - \left( \frac{r}{R_z} \right)^2 - \left( \frac{R_w}{r} \right)^2 \right]$$

a napężenie obwodowe zmieniają się wg wzoru:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \cdot \frac{\gamma \cdot \omega^2}{g} \left[ 1 + \left( \frac{R_w}{R_z} \right)^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \cdot \left( \frac{r}{R_z} \right)^2 + \left( \frac{R_w}{r} \right)^2 \right]$$

Dla elementu nr 1 promień środka ciężkości jest równy  $r = 3,15 \text{ m}$ . Napężenie promieniowe jest równe:

$$\sigma_r = 0,2519 \text{ MPa}$$



Napężenie promieniowe obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{rMES} = 0,2698\text{MPa}$$

i jest większe o 7% od wartości teoretycznej. Dla tego samego elementu napężenie obwodowe jest równe:

$$\sigma_o = 7,546\text{MPa}$$

Napężenie obwodowe obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{oMES} = 8,283\text{MPa}$$

i jest większe od wartości teoretycznej o 10%.

Dla elementu nr 10 promień środka ciężkości jest równy  $r = 5,85\text{m}$ .  
Napężenie promieniowe jest równe:

$$\sigma_r = 0,136\text{MPa}$$

Napężenie promieniowe obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{rMES} = 0,1512\text{MPa}$$

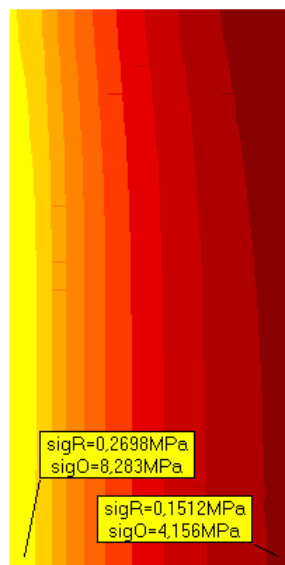
i jest większe o 11% od wartości teoretycznej. Dla tego samego elementu napężenie obwodowe jest równe:

$$\sigma_o = 3,878\text{MPa}$$

Napężenie obwodowe obliczone numerycznie jest równe:

$$\sigma_{oMES} = 4,156\text{MPa}$$

i jest większe od wartości teoretycznej o 7%.

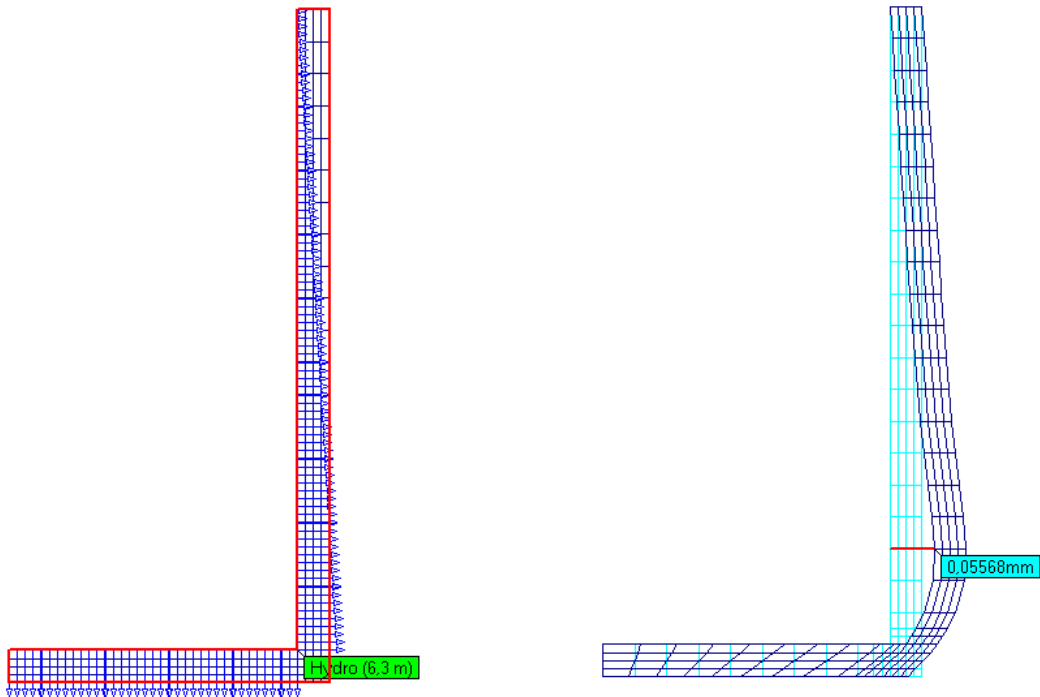




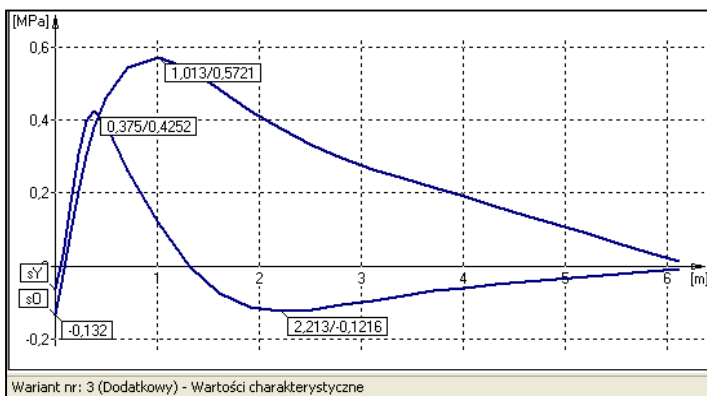
### 63.3. Zadanie Zbiornik

W tym zadaniu zamodelowano walcowy zbiornik pionowy. Przyjęto średnicę wewnętrzną zbiornika 5,4m i wysokość całkowitą 6,3m. Dno i ściany zbiornika mają taką samą grubość 0,3m. Zbiornik wykonano z betonu C20/25 o module Younga  $E = 29991\text{MPa}$  i liczbie Poissona  $\nu = 0,2$ . Zadano dwa schematy obciążenia: ciężar własny i obciążenie hydrostatyczne. Na rysunku obok pokazano to obciążenie.

Zbiornik posadowiono na sprężystym podłożu o współczynniku sprężystości  $C = 10\text{MPa/m}$ .



Postać odkształcenia promieniowego zbiornika wywołanego łącznym działaniem ciężaru własnego i obciążenia hydrostatycznego pokazano z prawej strony.



Przebieg naprężeń poosiowych i obwodowych wywołanych łącznym działaniem obu obciążeń pokazano poniżej